
M. E. Bary's neue physikalische Probleme. Für die oberen Classen höherer Lehranstalten, Gymnasien, Realschulen, sowie für Studirende und Lehrer der Mathematik und Physik. Von Dr. F. A. Korschel, ordentl. Lehrer der Realschule zu Burg. Mit 3 Kupfertafeln. 1857. 1 Thlr. 6 Sgr.

Herr Direktor Dr. Wiegand sagt über vorliegendes Werk:

Die Nouveaux Problèmes de Physique etc. par M. E. Bary gehören unstreitig zu dem Ausgezeichnetsten, was die französische Literatur in diesem Genre geliefert hat, dabei geben sie ein ausserordentlich günstiges Zeugniss über die Leistungen in der Physik auf den französischen Lyceen. Wenn trotzdem dieses vortreffliche Werk, das in erster Auflage bereits im Jahre 1838 erschienen ist, bis jetzt noch keinen deutschen Uebersetzer gefunden hatte, so können wir uns dies nicht anders erklären, als dass einmal die dem Uebersetzer hier entgegentretenden, besonderen Schwierigkeiten davon abschreckten, dann aber, dass der in dem Werke eingenommene Standpunkt vielleicht Manchem als ein für die deutschen Schulanstalten zu hoch gegriffener erscheinen mochte. Was den ersteren Punkt anlangt, so müssen wir dem Herrn Dr. Korschel das Zeugniss geben, dass er jene Schwierigkeiten in dem Maasse überwunden hat, dass wohl nicht leicht Jemand daran erinnert werden dürfte, dass er eine Uebersetzung vor sich habe. In Betreff des zweiten Punktes aber sind unsere Real-, höheren Gewerb- und polytechnischen Schulen, wie sie dermalen sind, auf einer Entwickelungsstufe angelangt, wo auch die nur mit Hülfe der Infinitesimal-Rechnung lösbaren Aufgaben in das Bereich des Unterrichts sehr wohl gezogen werden können. Wir müssen deshalb das Unternehmen als ein vollkommen zweckgemässes bezeichnen und zweifeln nicht, dass die gehobenen Schulen der erwähnten Art die fleissige Arbeit des Herrn Uebersetzers, die sich auch durch eine äusserst geschmackvolle Ausstattung auszeichnet, mit lebhafter Freude begrüssen werden.

Miles Bland's sämmtliche algebraische Gleichungen des 1. u. 2. Grades theils mit, theils ohne Auflösungen. Mit einem Anhange, enthaltend: Aufgaben aus der höheren Mathematik, herausgegeben von C. Girl. 2 Bde. 1857. 1r Bd. 2 Thlr. 2r Bd. 20 Sgr.

Weissenborn, Dr. **Herm.,** Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange, ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Mit 3 Figurentafeln. 1856. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

(Enth. die Fluxions-, Differential- und Derivationsrechnung.)

Wiegand, A., Sammlung von mehr als 300 geometrischen Lehrsätzen und Aufgaben, enthaltend des Herrn Professor Jacobi Anhänge zu van Swinden's Aufgaben der Geometrie. Mit Beweisen, Auflösungen und Zusätzen. 2 Bde. M. 26 Figurentafeln. 1847 u. 48. 8. $1\frac{4}{5}$ Thlr.

Hellwig, C., Das Problem des Apollonius nebst den Theorien der Potenzörter, Potenzpunkte, Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsgeraden, Potenzkreise, Pole und Polaren im Sinne der neueren Geometrie für alle Lagen der gegebenen Kreise. Mit 4 Figurentafeln. 15 Sgr.

Binnen Kurzem erscheint:

Blumberger, Elemente der der neueren Geometrie angehörigen Theorien. c. 10 Bg mit Kpfrtfln.

Das

Problem des Pappus

von den Berührungen,

durch die geometrischen Oerter

aufgelöst und erweitert,

nebst

einer Reihe von Lehrsätzen und Aufgaben über Berührungen.

Zur Beförderung des geometrischen Studiums

in den mittleren und oberen Classen

der Gymnasien, Real- und Gewerbschulen

von

W. Berkhan.

Mit 4 Figurentafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1857.

Vorwort.

Nichts fördert den Fortschritt des geometrischen Studiums eines Schülers mehr, als das selbständige Auflösen von Aufgaben, indem theils die gefundene Construction dem Gedächtnisse sich stärker einprägt, theils durch die Erfindungsfreude das wissenschaftliche Interesse erhöht wird.

Zu diesem Ende bedarf es aber eines Vorbildes von angemessener Art. Für die geradlinigen Figuren bieten die Verwandlungen der Flächen, deren Grenzen und die Theilungen derselben allerdings vielfachen Stoff; allein die Eigenschaften des Kreises — dieser ersten und einfachsten aller krummlinigen Figuren — haben noch mehr Ansprechendes und verdienen daher, als ein zweites Stadium, vorzugsweise Berücksichtigung.

Um das erwünschte Ziel zu erreichen, schien es mir nun zweckmässiger, der analytischen Behandlung die constructive Lösung vorangehen zu lassen, da der Anfänger lieber construirt als rechnet.

Sobald nun der Schüler die einzelnen Fälle dieses Problems in sich aufgenommen hat, wird es für ihn zweckmässig sein, den einen oder anderen leichteren Fall des complicirten Apollonianischen Problems selbständig aufzulösen und zwar zunächst wieder auf rein constructivem Wege, sodann aber zu dem analytischen Verfahren zu schreiten, vorausgesetzt, dass der leitende Lehrer

seinen Cursus schon bis über die Construction der Gleichungen fortgeführt hat.

Der Verfasser hat seit einer Reihe von Jahren seine Schüler, bevor die Aehnlichkeitstheorie erklärt war, das Berührungsproblem analysiren und auflösen lassen und dabei die erspriesslichsten Fortschritte wahrgenommen; in den höheren Classen ward dann, nach Absolvirung des Abschnittes von der Proportion und Aehnlichkeit der Figuren, das Problem des Apollonius constructiv durchgeführt; jedoch meistens nur so weit, dass die Schüler, mit den Hülfssätzen vertraut, das Uebrige zum Privatstudium in den Ferien machten. Bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie in den oberen Classen wurden wieder mehrere Berührungsaufgaben erläutert und das Weitere dem Privatfleisse überlassen.

Möge nun diese kleine Schrift, an welche sich eine andere von Hellwig*) sehr gut anschliesst, beitragen, die Liebe zur Geometrie zu fördern und dem Selbstudium einen neuen Impuls geben!

Blankenburg, im Januar 1857.

W. Berkhan.

---

*) Das Problem des Apollonius etc.

Pappus, ein griechischer Mathematiker der Alexandrinischen Schule, lebte im vierten Jahrhundert nach Christi Geburt und lehrte die Mathematik zu Alexandrien.

Die Bücher des Euklides und Apollonius — des grossen Geometers — commentirte er mit vielem Scharfsinne und seinen Schriften verdanken wir die meiste Aufklärung über die Geschichte der griechischen Mathematiker.

Das zusammengesetztere Apollonianische Problem von den Berührungen (περὶ ἐπαφῶν), worüber Apollonius zwei Bücher geschrieben hatte, die aber leider verloren gegangen sind, vereinfachte Pappus dadurch, dass er nur zwei Elemente von Puncten, Geraden und Kreisen als gegeben annahm, wodurch dasselbe wesentlich leichter ausfiel und jenem zur Vorbereitung dient.

Die Aufgabe des Pappus lautet:

„Wenn von Puncten, Geraden und Kreisen irgend zwei in derselben Ebene der Lage nach gegeben sind, einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu beschreiben, welcher die gegebenen Puncte, Geraden oder Kreise berühre.“

Diese allgemeine Aufgabe begreift sechs besondere unter sich. Es können nämlich gegeben sein:

1) zwei Puncte . . . . P, P;
2) ein Punct und eine Gerade . . . . . . P, G;
3) ein Punct und ein Kreis . . . . P, K;
4) zwei Gerade . . . . G, G;
5) eine Gerade und ein Kreis . . . . . . G, K;
6) zwei Kreise . . . . K, K.

Dass hier nicht mehr Fälle möglich sind, folgt aus dem bekannten Gesetze der Combinationslehre, gemäss welchem die An-

zahl aller möglichen Combinationsformen zur Classe 2 aus 3 unbedingt wiederholbaren Elementen, nämlich:

$$\overset{2}{C}[1, 1, 2, 2, 3, 3] = \frac{3(3+1)}{1.2} = 6 \text{ sein muss,}$$

indem allgemein für n Elemente

$$\overset{2}{C}w(n) = \frac{n(n+1)}{1.2} \text{ ist.}$$

Die einzelnen Combinationen sind:

11; 12; 13; 22; 23; 33.

Aus der Kreislehre werden folgende Lehrsätze als bekannt vorausgesetzt:

1. Ein Perpendikel auf des Kreises Halbmesser durch dessen Endpunct im Umkreise liegt mit allen übrigen Puncten ausserhalb des Kreises; jede andere durch denselben Endpunct gezogene, gegen den Halbmesser schief gerichtete Linie schneidet den Kreis.
2. Ein Perpendikel auf die Tangente im Berührungspuncte geht durch des Kreises Mittelpunct.
3. Ein Perpendikel aus dem Mittelpuncte des Kreises auf eine ihn Berührende gefällt, trifft den Berührungspunct.
4. Der nach dem Berührungspuncte einer Tangente gezogene Halbmesser steht auf dieser senkrecht.
5. Die Stücke zweier sich schneidenden Tangenten, welche zwischen dem Durchschnittspuncte und den Berührungspuncten liegen, sind gleich gross.
6. Bei zwei sich berührenden Kreisen liegen die Mittelpuncte und der Berührungspunct in einer geraden Linie.
7. Stehen die Mittelpuncte zweier Kreise um die Summe ihrer Halbmesser von einander ab, so berühren sich die Kreise von aussen; und stehen sie um die Differenz der Halbmesser von einander ab, so berührt der eine Kreis den andern von innen.

Der geometrische Ort.

In Beziehung auf eine Ebene versteht man unter einem geometrischen Orte jede gerade oder krumme Linie, oder auch eine Fläche, in welcher ein gesuchter Punct liegen muss, um einer Bedingung Genüge zu leisten. So ist z. B. bei einem

gleichschenkligen Dreiecke das Perpendikel durch die Mitte der Basis ein Ort für die Spitze aller auf dieser möglichen gleichschenkligen Dreiecke. Ebenso ist der geometrische Ort eines Punctes *P*, dessen Abstand oder Entfernung von einer Geraden gegeben ist, eine mit dieser parallel gezogene Linie in dem gegebenen Abstande.

Soll ein Punct bestimmt werden, welcher von einem gegebenen *A*, eine bestimmte Entfernung $= a$ hat, so beschreibe man mit dem Halbmesser $AB = a$ um *A* einen Kreis; die Peripherie ist der gesuchte Ort.

Wollte man in einem gleichseitigen Dreiecke denjenigen Punct haben, aus welchem Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, die Summe derselben dem Höhenperpendikel des Dreiecks gleich sei: so würde jeder in dem Dreiecke angenommene Punct das Verlangte leisten und ist also die gesammte Fläche des Dreiecks der geometrische Ort für solchen Punct.

Zwei sich schneidende Oerter bestimmen die feste Lage eines gesuchten Punctes, vorausgesetzt, dass nur ein Durchschnitt stattfindet. Berührt ein Ort den andern, so giebt es ebenfalls nur einen Punct. Findet bei der Bestimmung eines Punctes kein Durchschnitt seiner geometrischen Oerter statt, so ist dies ein sicheres Zeichen, dass die Aufgabe unmöglich ist.

Dieses wird hinreichend sein die folgenden Auflösungen gehörig zu verstehen.

1. Aufgabe, *P. P.*

Es sind gegeben zwei Puncte; man soll einen Kreis beschreiben von gegebener Grösse d. h. mit gegebenem Halbmesser, der durch diese Puncte geht. (Fig. 1.)

Auflösung.

Es seien *A* und *B* die gegebenen Puncte und die Linie *r* der gegebene Halbmesser.

Da nun die auf *AB* durch deren Mitte *C* gezogene Senkrechte *MN* der geometrische Ort für die Centra aller derjenigen Kreise ist, welche durch die Puncte *A* und *B* gehen; so ist der Mittelpunct des gesuchten Kreises bald gefunden, indem man nur nöthig hat, aus *A* (oder *B*) mit der gegebenen Radiusweite $AD = r$ um *A* einen Kreis zu beschreiben, welcher die Senkrechte in *D* und *E*

schneide. Der aus *D* (oder *E*) mit *r* beschriebene Kreis *ABF* (oder *ABG*) ist der gesuchte.

Beweis. Man ziehe *AD*, *BD*, so ist einleuchtend, dass $\triangle ACD \cong \triangle DCB$ sei, folglich ist $DA = DB = r$.

Discussion. Die Auflösung ist nur so lange möglich, als $r > \frac{1}{2}AB$ oder $r = \frac{1}{2}AB$ ist; in diesem Fall ist der Kreis ein Minimum; sie wird jedoch unmöglich, sobald $r < \frac{1}{2}AB$. Ist daher $r > \frac{1}{2}AB$, so leisten immer zwei der Lage nach verschiedene Kreise das Verlangte.

II. Aufgabe. *P*, *G*.

Es ist gegeben ein Punct und eine Gerade; man soll mit dem gegebenen Halbmesser einen Kreis beschreiben, welcher die Gerade berührt und durch den gegebenen Punct geht. (Fig. 2.)

Auflösung.

Sei *A* der gegebene Punct und *BC* die Gerade; dann können zwei Fälle stattfinden: es liegt entweder *A* in der Geraden *BC*, oder ausserhalb derselben.

Fall 1. Der Punct *A* liege in *BC*.

Im Puncte *A* errichte man ein Perpendikel *AF* auf *BC* und verlängere dasselbe nach der entgegengesetzten Seite. Alsdann mache man $AD = AE =$ dem gegebenen Halbmesser *r*. Wird nun um *D* mit *DA* der Kreis *AHF*, und um *E* mit *EA* der Kreis *AIG* beschrieben, so leistet jeder von ihnen das Verlangte (Satz 1).

Fall 2. (Fig. 3.) Der Punct *A* liege ausserhalb *BC*.

In *BC* nehme man willkürlich einen Punct *C*, errichte auf *BC* und zwar auf der Seite, wo *A* liegt, ein Perpendikel *CH*, nehme auf demselben $CD = r$ und ziehe $DF \,\#\, BC$, so ist *DF* ein Ort für den gesuchten Mittelpunct. Ferner beschreibe man um *A* mit dem gegebenen Halbmesser $r = AE$ einen Kreis *EFI*, so ist dessen Peripherie wieder ein Ort für den gesuchten Punct; dieser Kreis möge nun die Parallele *DF* in *E* und *F* schneiden: dann kann sowohl *E* als *F* der Mittelpunct des gesuchten Kreises sein.

Beweis. Man fälle aus *E* das Perpendikel *EG* auf *BC*; so ist $GE \,\#\, CD$ und folglich $EG = CD = r$. Demnach berührt der um *E* mit *EG* beschriebene Kreis *GIA* die Gerade *BC* (Satz 1). Da aber auch *E* im Umkreise von *FEI* liegt, so ist $EA = EG = r$, daher geht der um *E* beschriebene Kreis durch den Punct *A* und

erfüllt somit beide Bedingungen. Ebenso folgt, dass ein zweiter Kreis um *F* beschrieben, dasselbe leistet.

Discussion. Für den ersten Fall ist die Aufgabe allemal möglich und giebt es immer zwei Kreise, welche derselben Genüge leisten. Für den zweiten Fall bemerke man Folgendes: Schneidet der um *A* mit *r* beschriebene Kreis die Parallele nicht und berührt er auch die *DF* nicht, so ist die Auflösung unmöglich. Berührt jener Kreis die Parallele, so findet nur ein Kreis statt. Ausser diesen Fällen lösen immer zwei Kreise die Aufgabe.

III. Aufgabe. *P*, *K*.

Es ist gegeben ein Punct und ein Kreis; man soll mit dem Halbmesser r einen Kreis beschreiben, welcher durch den Punct geht und den Kreis berührt.

Auflösung.

Man kann hier zwei Hauptfälle unterscheiden:

1. wenn der Punct *A* ausserhalb des Kreises liegt (Fig. 4).

α) *BGH* sei der gegebene Kreis und *A* der gegebene Punct. Aus *A* beschreibe man mit $AE = r$ den Kreis *EIF*, so ist seine Peripherie der geometrische Ort für das Centrum des gesuchten Kreises. Man ziehe aus dem Centro *C* des gegebenen Kreises willkürlich eine Gerade *CD* und mache $BD = r$. Alsdann beschreibe man um *C* mit dem Halbmesser *CD* den Kreis *DKF*, welcher jenen in *F* und *K* schneide; aus *F* beschreibe man endlich mit *FA* den Kreis *GAI*, dieser ist der gesuchte. Ein zweiter Kreis um *K* mit *KA* beschrieben leistet dasselbe.

Beweis. Man ziehe *CF*. Da nach der Construction $CF = CD$ = der Summe der Halbmesser des gegebenen und des gesuchten Kreises ist, und jeder Punct *F* im Umfange des um *A* mit *r* beschriebenen Kreises Mittelpunct des Kreises sein kann, der durch *A* geht; so ist $FG = FA$. Da nun *CF* der Abstand der Centra der Kreise *BGH* und *GAI*, $= CG + GF$, also der Summe ihrer Halbmesser gleich ist: so berühren diese Kreise einander von aussen (Satz 7). Dasselbe gilt von dem zweiten um *K* beschriebenen Kreise.

β) Nachdem wie zuvor um *A* (Fig. 5) mit $AE = r$ der Kreis *EIF* beschrieben worden, ziehe man aus dem Centro *C* des ge-

gebenen Kreises eine unbestimmte Gerade CR, mache $CM =$ dem Unterschiede der Halbmesser der beiden Kreise um C und A, d. i. $CM = r - CG$ und beschreibe um C mit CM einen concentrischen Kreis MNO. Dieser schneide den um A beschriebenen in N und O; wird alsdann aus jedem dieser Puncte mit r ein Kreis beschrieben, wie z. B. der aus N mit der Weite NA, der Kreis APQ, so geht dieser durch den Punct A und berührt den gegebenen einschliesslich.

Beweis. Durch die Mittelpuncte N und C beider Kreise ziehe man den Radius NP, so ist die Centrale $CN = NP - CP = r - CG$, also = dem Unterschiede ihrer Halbmesser, folglich muss der eine Kreis den andern von innen berühren (Satz 7).

2. Der Punct A liege (Fig. 6) innerhalb des gegebenen Kreises PQS, dessen Mittelpunct C und dessen Radius $CQ = R$ sei.

Man schneide von $CQ = R$ ein Stück $BQ = r$ ab und beschreibe mit $CB = R - r$ aus C den concentrischen Kreis BDE. Darauf beschreibe man um A mit dem gegebenen Halbmesser r einen Kreis DEF; schneidet nun dieser den concentrischen Kreis in den Puncten D und E, so ist jeder von diesen Mittelpunct des gesuchten Kreises. Z. B. der um E mit $EA = r$ beschriebene Kreis DAP geht durch A und berührt den gegebenen Kreis in einem Puncte P, welcher in der verlängerten CE liegt.

Beweis. Durch die Mittelpuncte E und C beider Kreise ziehe man den Radius CP; so ist die Centrale $CE = CP - EP = R - r$. Demnach muss der um E mit $EP = r$ beschriebene Kreis den gegebenen um C in P berühren (Satz 7). Da aber auch E in der Peripherie des um A mit $AE = r$ beschriebenen Kreises liegt, so geht offenbar jener Kreis um E auch durch den Punct A. Dasselbe gilt auch von dem zweiten Kreise AES, dessen Mittelpunct D ist und der den gegebenen in S berührt — dem Endpuncte des Halbmessers CDS.

Discussion. 1) Für den Fall, wo der Punct A in der Peripherie des gegebenen Kreises liegt, kann sowohl eine Berührung von aussen, als auch von innen stattfinden. Ist der Halbmesser des gegebenen Kreises $= R$ und ist r der des gesuchten; so wird für $r \gtreqless R$ allemal eine Berührung von aussen und für $r \gtrless R$ eine solche von innen stattfinden, indem sich für $R = r$ die Kreise decken, also keine eigentliche Berührung mehr besteht.

2) Unmöglich kann die Aufgabe werden, wenn der Punct A ausserhalb des gegebenen Kreises liegt und dann die Centrale $CA > R + 2r$ ist; denn so lange der um C mit $CD = R + r$ beschriebene Kreis den um A mit r beschriebenen weder schneidet noch berührt, haben die beiden geometrischen Oerter keinen Durchschnitt. Findet die Berührung derselben statt, d. h. ist $CA = R + 2r$, so giebt es offenbar nur einen Kreis, welcher die Aufgabe löst.

3) Wenn der im 1sten Hauptfalle β) voriger Aufgabe um C mit der Differenz der Halbmesser $(r - R)$ beschriebene concentrische Kreis (Fig. 5) den um A mit r beschriebenen in einem Puncte N berührt, so wird auch der um N mit r beschriebene Kreis den gegebenen in P einschliessend berühren, da hier alsdann die Gerade $PCNA = R + r - R + r = 2r$ ist. Findet in diesem Falle keine Berührung des concentrischen Kreises mit dem um A beschriebenen statt, oder ist die Centrale $CA > 2r - R$, so wird ein solcher Kreis unmöglich.

4) Berührt der (im 2ten Hauptfalle) um A beschriebene Kreis den concentrischen um C in einem Puncte D, so ist D Mittelpunct eines Kreises, welcher durch A geht und den gegebenen von innen berührt. Falls aber der mit r um A beschriebene Kreis den concentrischen weder schneidet noch berührt, so wird die Aufgabe wieder unmöglich.

IV. Aufgabe. *G*, *G*.

Es sind zwei Gerade der Lage nach gegeben; man soll mit gegebenem Halbmesser r einen Kreis beschreiben, welcher die Geraden berührt.

Auflösung.

Es sind hier nur zwei verschiedene Fälle möglich: die gegebenen Linien sind entweder convergirend, oder parallel.

1. AB und CD (Fig. 7) seien die beiden gegebenen convergirenden Linien und F deren Durchschnitt. In AB nehme man willkürlich einen Punct K, errichte KL senkrecht auf AB, verlängere KL nach I und mache $KL = KI =$ dem gegebenen Halbmesser r. Durch L und I ziehe man $LM \# AB \# OU$; so ist LM der geometrische Ort für das Centrum des Kreises, welcher die AB berührt, sowie OU der Ort auf entgegengesetzter Seite. Ebenso

nehme man in CD beliebig den Punct G, mache EH senkrecht auf CD und nehme $GE = GH = r$. Durch E, H ziehe man mit CD die Parallelen PX, MH, so sind diese Linien die Oerter für den Mittelpunct des gesuchten Kreises. Schneiden sich nun die Oerter OU, PX in U, so ist U der Mittelpunct des gesuchten Kreises. Diesem Kreise entspricht ein zweiter, dessen Centrum M der Durchschnitt der Oerter LM, OM ist. Auf der entgegengesetzten Seite sind ausserdem zwei andere, jenen gleiche Kreise möglich, deren Centra O und Q durch den Durchschnitt der Oerter OU und MH sowie ML und PX entstehen. Somit finden unter allen Umständen bei zwei convergirenden Geraden stets vier Berührungskreise statt, da die senkrechten Radien UV, UW, ferner QR, OT u. s. w. sämmtlich dem Abstande der Parallelen, d. i. $= r$ sind.

2. Die Geraden AB, CD seien parallel. Man errichte auf einer von ihnen, z. B. CD, in einem beliebigen Puncte F ein Perpendikel FG, welches die andere in G treffe. Die Parallele MN durch dessen Mitte E, ist dann der geometrische Ort für den Mittelpunct des gesuchten Kreises. Ist also $EF =$ dem gegebenen Halbmesser r, so giebt es unendlich viele einander gleiche Kreise, welche der Aufgabe Genüge leisten. Ist dieses nicht der Fall, also $EF \gtrless r$, so ist die Aufgabe unmöglich.

V. Aufgabe. G, K.

Es ist eine Gerade und ein Kreis gegeben; man soll mit gegebenem Halbmesser einen Kreis beschreiben, welcher die Gerade und den Kreis berührt.

Auflösung.

Man kann hier drei Fälle unterscheiden:

1) die Gerade liegt ganz ausserhalb des gegebenen Kreises;
2) die Gerade schneidet den Kreis;
3) die Gerade berührt den Kreis.

1. Fall. Sei (Fig. 8) AB die gegebene Gerade und HKL der gegebene Kreis, dessen Mittelpunct C ist. Man nehme in AB beliebig den Punct B, errichte auf ihr das Perpendikel $BG = r$ und ziehe $FG \parallel AB$. Hierauf ziehe man aus dem Mittelpuncte C des gegebenen Kreises eine Gerade CKI und setze an den Halbmesser CK die $KI = r$. Endlich beschreibe man um C mit CI

einen concentrischen Kreis IEF, welcher die Parallele FG in den Puncten E, F schneide; so ist jeder von diesen Mittelpunct des gesuchten Kreises.

Beweis. Offenbar ist die in einem Abstande $BG = r$ mit AB gezogene Parallele FG der geometrische Ort für den Mittelpunct des Kreises, welcher die Gerade AB berührt (Satz 1). Ebenso ist die Peripherie EFI der geometrische Ort für jeden Kreis, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben, den gegebenen Kreis KLH berühren muss (Satz 7). Wird nun FG vom Kreise IEF in E geschnitten, so muss das Perpendikel ED auf $AB = r$ sein und, zieht man CE, so ist EH ebenfalls $= r$, daher berührt (Satz 7) der um E beschriebene Kreis auch den gegebenen in H. Dasselbe gilt von dem zweiten Durchschnittspuncte F. Wenn aber der mit $CI = CK + r$ um C beschriebene Kreis die FI in keinem Punkte trifft, so ist die Aufgabe in diesem Falle unmöglich. Wird endlich die FG von dem um C beschriebenen Kreise IEF berührt, so giebt es nur einen Kreis, welcher der Aufgabe Genüge leistet.

2. Fall. Die Gerade AB (Fig. 9) schneide den gegebenen Kreis HKL vom Halbmesser $CK = R$, in den Puncten P und Q. Auf AB sei BG senkrecht und gleich dem gegebenen Halbmesser r; durch G ziehe man $GF \nparallel AB$; so ist FG ein geometrischer Ort für den Mittelpunct des gesuchten Kreises. Darauf beschreibe man um C mit dem Radius $CI = CK + KI = R + r$, sowie mit $CM = CK - KM = R - r$ die concentrischen Kreise IEF, MNO. Wenn nun jener die Parallele FG in den Puncten E, F schneidet, so leisten die um E und F mit r beschriebenen Kreise DHT, LWX das Verlangte. Schneidet ausserdem die Parallele GF auch den kleineren concentrischen Kreis MNO in den Puncten N, O, so giebt es wieder zwei Kreise, welche den gegebenen von innen berühren, in welchem Falle also vier Kreise der Aufgabe Genüge leisten. Sollte die Parallele FG den innern concentrischen Kreis nicht schneiden, sondern berühren, so sind es drei Kreise; findet aber weder Durchschnitt noch Berührung statt, so lösen, wie im vorigen Falle, nur zwei Kreise die Aufgabe.

Der Beweis dieser Auflösung ergiebt sich leicht aus dem Vorigen und Satz 7.

3. Fall. Die Gerade AB berührt den gegebenen Kreis (Fig. 10).

Sei DHI der gegebene Kreis, C dessen Mittelpunct und AB die ihn in D berührende Gerade. Man ziehe von C durch D eine Gerade CE, mache $DF = DE =$ dem gegebenen Halbmesser r und ziehe durch F die $KG \# AB$. Alsdann beschreibe man um C mit der Weite $CE = CD + r$ einen Kreis EGK, welcher jene Parallele in G und K schneide, so sind F, E, G, K die Mittelpuncte der gesuchten Kreise.

Beweis. Da nach Satz 4 $CDA = ADE$, so muss der um E mit $ED = r$ beschriebene Kreis den gegebenen in D von aussen berühren und ebenso die AB, welche beider Kreise gemeinschaftliche Tangente ist. Der um F mit $FD = r$ beschriebene Kreis berührt den gegebenen in D von innen. Da ferner, wenn CG, CK gezogen werden, $GH = KI = r$, so müssen (Satz 7) die um G und K mit r beschriebenen Kreise den gegebenen in H ünd I berühren und weil die Perpendikel aus G und K auf AB einander gleich und auch $= r$ sind, so berühren beide Kreise die Gerade AB. Hieraus folgt nun, dass in diesem Falle stets vier Kreise die Bedingungen erfüllen.

Anmerkung. Alle drei Fälle lassen sich, wie man leicht sieht, unter eine allgemeine Auflösung bringen.

VI. Aufgabe. K, K.

Es sind zwei Kreise gegeben; man soll einen Kreis mit gegebenem Halbmesser beschreiben, welcher beide Kreise berührt.

Auflösung.

Die Lage der beiden gegebenen Kreise kann eine vierfache sein; sie liegen entweder getrennt, so dass die Centrale grösser als die Summe der Radien ist, oder sie schneiden sich; sie berühren sich von aussen oder von innen, oder sie sind endlich concentrisch. Die Auflösung bietet nun drei Unterschiede, welche nach der Reihe betrachtet werden.

1. Die excentrischen Kreise liegen getrennt, oder schneiden sich (Fig. 11 und 12). Seien A und B die Mittelpuncte der gegebenen Kreise. Man ziehe die Halbmesser AD, BF, verlängere sie um $DE = FG = r$, dem gegebenen Halbmesser, und beschreibe um A mit AE den Kreis EMN, sowie um B mit BG den Kreis GMN. Diese Kreise mögen sich in den Puncten M und N schneiden, so ist jeder von ihnen Mittelpunct des gesuchten

Kreises, und zieht man die Radien AM, BM, so sind die Durchschnitte K und I die Berührungspuncte für den mit r um M beschriebenen Kreis.

Beweis. Nach der Construction ist offenbar der um A mit AE beschriebene Kreis EMN der geometrische Ort für den Mittelpunct eines jeden Kreises vom Halbmesser r, welcher den um A beschriebenen berühren muss (Satz 7). Ebenso ist die Peripherie des um B mit BG beschriebenen Kreises der geometrische Ort für jeden solchen Kreis, welcher mit dem Halbmesser r beschrieben, den Kreis um B berühren muss. Wenn also beide Oerter sich schneiden, so ist der Durchschnittspunct der Mittelpunct des Kreises, welcher das Verlangte leistet.

2. Die gegebenen Kreise berühren sich von aussen oder von innen.

Die um B und A (Fig. 13) mit den Halbmessern BD, DA beschriebenen Kreise mögen sich von aussen in D berühren. Man ziehe die Centrale AB und verlängere sie beiderseits unbestimmt; man mache ferner $DE = DC = r$, so ist sowohl E als C Mittelpunct eines Kreises, welcher mit dem gegebenen Halbmesser r beschrieben, die gegebenen Kreise in dem Puncte D berührt.

Ausser diesen beiden Kreisen giebt es aber noch zwei andere, welche der Aufgabe genügen und die gegebenen Kreise ausschliessend berühren. Um ihre Mittelpuncte F und G zu finden, beschreibe man um B und A mit den Halbmessern BC und AE die concentrischen Kreise CFG und GEF (die geometrischen Oerter der gesuchten Mittelpuncte nach dem vorigen Falle 1). Dann sind die Durchschnitte F und G diese Puncte.

Berühren sich die gegebenen Kreise (Fig. 14) von den Halbmessern AD, BD von innen in D, so verlängere man wieder die Centrale AB zu beiden Seiten. Nimmt man nun $DE = r$, so berührt der um E beschriebene Kreis die gegebenen in D von aussen; macht man $DC = r$, so muss der um C mit r beschriebene Kreis die gegebenen einschliessend in D berühren, welches sich aus Satz 7 sehr leicht ergiebt.

3) Die gegebenen Kreise seien concentrisch. (Fig. 15.)

Aus dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte A sei der grössere der gegebenen Kreise mit dem Halbmesser AC, der kleinere mit AB beschrieben.

Eine Berührung beider Kreise durch einen dritten ist nur auf zweifache Weise möglich. Es muss nämlich der gegebene Halbmesser entweder der halben Differenz der Halbmesser dieser concentrischen Kreise, oder der halben Summe derselben gleich sein, also entweder $= \frac{1}{2}(AC - AB) = CD$, oder $= \frac{1}{2}(AC + AB) = D'C$, wovon der Grund leicht in die Augen fällt.

Erweiterung dieses Problems.

Das Problem des Pappus ist noch einer Erweiterung fähig, welche darin besteht, dass ein Element mehr unter die Data aufgenommen wird und dann je drei Stücke gegeben sind, nämlich Punct, Gerade und Kreis. Hierbei ist jedoch die ausdrückliche Bedingung, dass wenigstens ein Punct in allen Fällen gegeben sein muss, der aber nie abgesondert oder frei, sondern entweder in der Geraden, oder in der Peripherie eines Kreises liegen soll. Ausserdem wird die vorige zweite einschränkende Bedingung, einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu beschreiben, dahin erweitert, dass der Halbmesser des gesuchten Kreises kein Datum ausmacht, sondern unbestimmt bleibt.

Die sich so darbietende Aufgabe lässt sich folgendermassen aussprechen:

„*Wenn von Puncten, Geraden und Kreisen in einer Ebene je drei Dinge gegeben sind, so dass ein Punct jedesmal in einer Geraden, oder im Umfange eines Kreises liegen soll: einen Kreis zu construiren, welcher die gegebenen Dinge berührt.*“

Man wird sich bald überzeugen, dass hier wieder ebenso viele verschiedene Fälle auftreten, als bei dem vorigen Probleme; denn bezeichnet man, wie oben, den Punct mit p, die Gerade mit g und den Kreis mit k; so hat man, den Punct in der Geraden (PG) und den Punct im Kreisumfange (PK) als eine Reihe von zwei Elementen, mit P, G und K, d. i. eine Reihe von drei Elementen zu combiniren und also eine eigentliche Variation, welche sich folgendermassen gestaltet:

P,	*G,*	*K.*
PG,	*PK.*	
P, PG;	*G, PG;*	*K, PG.*
P, PK;	*G, PK;*	*K, PK.*

Diese sechs Variationsformen enthalten nun folgende Aufgaben: Es kann namentlich gegeben sein:

I. ein Punct und eine Gerade mit einem Puncte in ihr *P, PG;*
II. ein Punct und ein Kreis mit einem Puncte in seinem Umfange . . . . *P, PK;*
III. eine Gerade und eine Gerade mit einem Puncte in ihr *G, PG;*
IV. eine Gerade und ein Kreis mit einem Puncte in seinem Umfange . . . . *G, PK;*
V. ein Kreis und eine Gerade mit einem Puncte in ihr *K, PG;*
VI. ein Kreis und ein zweiter Kreis mit einem Puncte in seinem Umfange . . . . *K, PK.*

Wir wollen diese Aufgaben, wie zuvor, nach der Reihe betrachten und überlassen dabei die Auflösung der leichteren Fälle dem Nachdenken des jungen Geometers.

I. Aufgabe. *P, PG.*

Es ist ein Punct und ausserdem eine Gerade mit einem Puncte in ihr gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch den Punct geht und die Gerade in dem gegebenen Puncte berührt.

Die Auflösung wird man leicht finden. In welchem Falle wird aber diese Aufgabe unmöglich?

II. Aufgabe. *P, PK.*

Es ist ein Punct und ausserdem ein Kreis mit einem Puncte in seiner Peripherie gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher durch die Puncte geht und den Kreis berührt.

Auflösung.

A sei der gegebene Punct, *BFG* der gegebene Kreis, *C* sein Mittelpunct und *B* der in seiner Peripherie gegebene (Fig. 16. *a* und *b*).

Man kann nun zwei verschiedene Fälle hinsichtlich der Lage des Punctes *A* unterscheiden. *A* liegt entweder ausserhalb oder innerhalb des gegebenen Kreises. Für beide Lagen gilt folgende Construction:

Man verbinde A mit B, halbire AB in D und errichte DE senkrecht auf AB; dann ist offenbar DE ein geometrischer Ort für jeden Kreis, welcher durch die Puncte A und B geht. Zieht man ferner von dem Mittelpuncte C durch den Berührungspunct B die unbestimmte Gerade CH, so ist wieder CH ein Ort für den gesuchten Kreis. Findet demnach ein Durchschnitt beider Oerter statt, etwa in E, so ist der um E mit EB beschriebene Kreis ABI der verlangte.

Denn wird AE gezogen, so ist $\triangle BDE \cong \triangle ADE$, folglich $EA = EB$ und, da die Mittelpuncte beider Kreise C, E mit dem Berührungspuncte B in gerader Linie liegen, so muss (Satz 7) der eine Kreis den andern berühren.

Discussion. Bleibt für den ersten Fall der Punct A in unveränderter Lage und rückt der Berührungspunct B auf der Peripherie des Kreises um C von B über G und F fort, so wird, nachdem AB gezogen, das durch deren Mitte D gehende Perpendikel DE rückwärts zu verlängern sein, um die durch C und B gezogene Gerade zu treffen resp. zu schneiden.

Die Auflösung der Aufgabe hängt also von dem Durchschnitte der Linien DE und CB ab; aber nicht in allen Fällen findet ein solcher statt. Um für diesen Fall die Puncte zu finden, welche die Aufgabe unmöglich machen, ziehe man (Fig. 17) von A an den gegebenen Kreis die beiden Tangenten AB und AB', welche (Satz 5) einander gleich sind. Weil nun ABC und $AB'C$ rechte Winkel sind (Satz 4), so ist $DE \# CB$, sowie $D'E' \# CB'$ und es sind also die Berührungspuncte B, B' diejenigen, welche keine Auflösung gestatten.

Zieht man von A durch den Mittelpunct C eine Gerade AB'', so werden die Endpuncte des Durchmessers B'', B''' diejenigen sein, für welche die gesuchten Kreise das Minimum und Maximum darstellen.

Demnach ist also die Aufgabe immer auflösbar, so lange der Winkel ABC kein rechter ist.

Im zweiten Falle, wo der Punct A innerhalb des gegebenen Kreises liegt, ist die Auflösung immer möglich, der Punct B mag im Umkreise liegen, wo er will.

Sollte endlich der Punct A auch in der Peripherie des Kreises liegen, so ist die Auflösung der Aufgabe offenbar nur dann möglich, wenn entweder A und B Endpuncte eines Durchmessers

sind, oder beide in einen Punct zusammen fallen; alsdann aber lösen unendlich viele Kreise die Aufgabe.

III. Aufgabe. *G*, *PG*.

Es sind zwei Gerade der Lage nach gegeben und in einer von ihnen ein Punct; man soll einen Kreis beschreiben, welcher beide berührt, die eine in dem gegebenen Puncte.

Die Auflösung und Determination wird dem Leser überlassen.

IV. Aufgabe. *G*, *PK*.

Es ist eine Gerade und ein Kreis gegeben nebst einem Puncte in der Peripherie desselben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher sowohl die Gerade, als auch den Kreis in dem gegebenen Puncte berührt.

Auflösung 1. (Fig. 18.)

BHI sei der gegebene Kreis, C sein Mittelpunct und B der Berührungspunct in der Peripherie; PQ sei die gegebene Gerade. Man verlängere den Radius CB unbestimmt nach M, nehme in dieser Linie willkürlich einen Punct D und fälle auf PQ das Perpendikel DE. Darauf mache man $DE = DG = DG'$, ziehe EG, EG' und führe $BF \# GE$, sowie $BF' \# EG'$; zieht man nun $FA \# ED$ und $F'A' \# ED$, so sind A und A' die Mittelpuncte zweier Kreise, welche resp. mit den Halbmessern AF und $A'F'$ beschrieben, der Aufgabe Genüge leisten.

Beweis. Da $DE \# AF$ und $GE \# BF$, so ist $\triangle ABF \sim \triangle DGE$, folglich hat man:

$$DE : DG = AF : AB.$$

Weil nun $DE = DG$ (*e. c*), so ist auch $AF = AB$. Mithin muss der um A mit AF beschriebene Kreis sowohl die Gerade PQ in F, als auch den gegebenen Kreis in B berühren (Satz 7).

Ebenso ist $\triangle DEG' \sim \triangle A'F'B$, daher

$$DE : DG' = A'F' : A'B,$$

folglich, weil $DE = DG'$ (*e. c*), so ist auch $A'F' = A'B$. Es muss demnach auch der um A' mit dem Halbmesser $A'B$ beschriebene Kreis dieselben Bedingungen erfüllen und, während jener Kreis um A den gegebenen um C ausschliessend berührt, wird dieser denselben einschliessend berühren. Ob die Gerade PQ den Kreis schneidet oder berührt, ist offenbar ganz gleichgültig.

Auflösung 2. (Fig. 19.)

Es sei wieder *BHI* der gegebene Kreis, *B* der Punct im Umfange und *PQ* die Gerade. Man ziehe den Radius *CB* und durch *B* die Tangente *BS*, welche verlängert die *PQ* in *S* treffe. Darauf halbire man den Winkel *QSB* durch *SA* und verlängere *CB* bis zum Durchschnitte mit *SA* in *A*. Beschreibt man nun mit dem Halbmesser *AB* um *A* einen Kreis, so leistet dieser das Verlangte.

Halbirt man ebenso den Nebenwinkel *PSB* durch die Gerade *SA'* und verlängert den Halbmesser *BC* bis zum Durchschnitte *A'* mit der Halbirungslinie, so ist *A'* der Mittelpunct und *A'B* der Radius eines zweiten Kreises, welcher die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Beweis. Man fälle die Perpendikel *AN* und *A'N'*. Da nun $\triangle ABS \cong \triangle ASN$, so ist $AB = AN$, mithin berührt der mit *AB* um *A* beschriebene Kreis den gegebenen in *B* und die Gerade *PQ* in *N*. Dasselbe gilt offenbar auch von dem zweiten um *A'* beschriebenen Kreise, da $A'B = A'N'$ ist.

Auflösung 3. (Fig. 20.)

Durch den Mittelpunct *C* des gegebenen Kreises *BHI* ziehe man *HD* senkrecht auf *PQ*, wobei *H*, *I* die Endpuncte des Durchmessers *HI* sind. Von diesen ziehe man durch den Berührungspunct *B* die Geraden *HBF* und *BIF'* bis zum Durchschnitte *F*, *F'* in *PQ*. Durch *F* und *F'* errichte man auf *PQ* die Perpendikel *FA*, *F'A'*, bis sie von der beiderseits verlängerten *BC* in *A* und *A'* durchschnitten werden; dann sind *A* und *A'* die Mittelpuncte zweier Kreise, welche die Aufgabe auflösen.

Beweis. Da $HD \# AF$, so ist $\angle F = H$ und $\triangle HBC \sim \triangle ABF$, folglich:

$$CB : CH = AB : AF.$$

Da nun $CB = CH$, so ist auch $AB = AF$; es berührt also der Kreis um *A* die *PQ* in *F* und den Kreis um *C* in *B* ausschliessend. Ebenso ist für den zweiten Kreis, um *A'*, klar, dass $\triangle BCI \sim \triangle BA'F'$, also $BC : CI = BA' : A'F'$, folglich, weil $BC = CI$, muss auch $A'B = A'F$ sein. Dieser Kreis berührt also den gegebenen Kreis in *B* einschliessend und die Gerade *PQ* in *F'*.

Auflösung 4. (Fig. 21.)

PQ sei die gegebene Gerade, C der Kreis und B der gegebene Punct in seiner Peripherie. Man ziehe den Radius AB, und verlängere ihn nach beiden Seiten unbestimmt. Vom Centro C fälle man auf PQ ein Perpendikel AD und beschreibe um C mit CD einen Kreis, welcher jene Gerade in den Puncten E und G schneide. Diese Puncte verbinde man mit D und ziehe $BF \# ED$, sowie $BF' \# DG$; so sind F und F' die Berührungspuncte. Mithin geben die in F und F' auf PQ errichteten Perpendikel FA, $F'A'$ in den Durchschnittspuncten A und A' mit der Geraden EG die Mittelpuncte der gesuchten Kreise.

Beweis. Da offenbar $\triangle BFA \sim \triangle EDC$, so ist $FA : BA = CD : CE$, also, weil $CD = CE$ (*e. c*), so ist $FA = BA$. Demnach berührt der um A mit AF beschriebene Kreis sowohl die PQ in F, als auch den Kreis C in B.

Ebenso ist $\triangle CDG \sim \triangle A'F'B$, daher

$$F'A' : A'B = DC : CG,$$

folglich, weil $DC = CG$ (*e. c.*), so ist auch $F'A' = A'B$ u. s. w.

Auflösung 5. (Fig. 22.)

Diese ergiebt sich aus folgender Analysis. PQ sei die gegebene Gerade, BDE der gegebene Kreis, welcher in B berührt werden soll und C sein Mittelpunct. Nun seien FBG, $BF'H$ die gesuchten Kreise, welche die PQ in F und F' berühren. Zieht man durch dieser Kreise Mittelpuncte A, A' die Centrale AA', so geht diese durch den Berührungspunct B (Satz 6). Denkt man sich nun auf AC in B ein Perpendikel BS errichtet, so ist dieses für beide Kreise eine gemeinschaftliche Tangente; wird dieselbe bis zum Durchschnitte S mit PQ verlängert, so muss (nach Satz 5) $SF = SB$ für den Kreis um A und $SB = SF'$ für den Kreis um A' sein. Hieraus ergiebt sich folgende einfache Construction:

Man errichte auf dem Halbmesser CB in B ein Perpendikel BS, welches PQ in S treffe und mache $SF = SB = SF'$, so sind F und F' die Berührungspuncte in PQ. Errichtet man endlich in F und F' die Perpendikel FA, $F'A'$ und verlängert BC beiderseits bis zum Durchschnitt mit jenen in A und A', so erhält man die Mittelpuncte der gesuchten Kreise.

Discussion. 1) Ist die durch den Halbmesser CB bestimmte Gerade der PQ parallel und schneidet oder berührt die

gegebene Gerade PQ den Kreis nicht, so bleibt in allen vier Auflösungen die Construction unverändert.

2) Ist wieder $CB \nparallel PQ$, schneidet aber die Gerade PQ den gegebenen Kreis, so gelten auch für diesen Fall die Auflösungen.

Unmöglich wird aber die Aufgabe, sobald PQ durch den Mittelpunct C, also auch durch den Punct B geht, indem hier der Halbmesser des gesuchten Kreises $= 0$ wird.

Berührt endlich PQ den Kreis, so giebt es nur einen einzigen Kreis, welcher die Aufgabe löst.

3) Hat der Punct B im Umkreise eine solche Lage, dass die durch ihn und den Mittelpunct C gehende Gerade senkrecht gegen PQ gerichtet ist, so ist jedesmal ein Kreis möglich, welcher der Aufgabe Genüge leistet, die Gerade PQ mag den gegebenen Kreis schneiden oder nicht; auch giebt jede der vorigen Auflösungen die gesuchten Mittelpuncte.

Anmerkung. Der Anfänger wird wohl thun, sich für alle diese besonderen Fälle die Figur zu entwerfen und daran die Construction zu wiederholen.

V. Aufgabe. K, PG.

Es ist ein Kreis, eine Gerade und ein Punct in derselben gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher den gegebenen Kreis und die Gerade in dem gegebenen Puncte berührt.

Auflösung 1. (Fig. 23.)

Sei DGD' der gegebene Kreis, C dessen Mittelpunct, PQ die Gerade und A der gegebene Punct in ihr. In A errichte man auf PQ das Perpendikel AF' und verlängere dasselbe auf der entgegengesetzten Seite nach B. Man mache $AB = AB' =$ dem Halbmesser CD des gegebenen Kreises, ziehe CB, CB' und vollende die gleichschenkligen Dreiecke CBF, $CB'F'$, so sind F und F' die Mittelpuncte und FA, $F'A$ die Halbmesser zweier Kreise, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Beweis. Man ziehe CF und $F'D'$. Da nun $CF = BF$ und $CD = AB$, so ist auch $FA = FD$; mithin berührt der um F mit FA beschriebene Kreis sowohl die Gerade PQ in A, als auch den Kreis in D ausschliessend. Da ferner $B'F' = CF'$ (*e. c.*) und $B'A = CD'$, so ist auch $F'B' + B'A = F'C + CD'$ d. i. $F'A = F'D'$, mithin berührt der um F' mit $F'A$ beschriebene Kreis die Gerade in A und den Kreis einschliessend in D'.

Auflösung 2. (Fig. 24.)

BDG sei der gegebene Kreis, *C* sein Mittelpunct und *A* der in *PQ* gegebene Punct. Durch *C* ziehe man *BCGE* auf *PQ* senkrecht, verbinde *B* mit *A*, wodurch der Durchschnittspunct *D* in der Peripherie des gegebenen Kreises entsteht. In *A* errichte man die *AI* senkrecht auf *PQ* und ziehe durch *C* und *D* eine Gerade bis zum Durchschnitte *F* mit *AI*, so ist *F* der Mittelpunct und $FA = FD$ der Halbmesser des gesuchten Kreises, welcher den gegebenen ausschliessend berührt. Zieht man ferner durch *A* und *G* eine Gerade *AH*, welche den Kreis in *H* schneidet und zieht dann durch *H* und *C* die Gerade *HCF'* bis zum Durchschnitte *F'* mit der senkrechten *AI*, so erhält man in *F'* den Mittelpunct eines zweiten Kreises vom Halbmesser $F'A = F'H$, welcher den gegebenen Kreis einschliesslich berührt, sowie die Gerade *PQ* in *A*.

Beweis. Offenbar ist hier wieder $\triangle BCD \sim \triangle DFA$ (wie in Auflösung 3 der vorigen Aufgabe), folglich $CB : CD = AF : FD$, also weil $CB = CD$, auch $AF = FD$. Ferner ist nach der Construction $\triangle CGH \sim \triangle HAF'$, daher

$$CH : CG = CF' : F'A;$$

weil nun $CH = CG$, so ist auch $HF' = F'A$ u. s. w.

Discussion. Berührt die Gerade *PQ* den gegebenen Kreis, so ist nur ein Kreis möglich, welcher die Aufgabe löst. — Dagegen sind unendlich viele Kreise auf beiden Seiten von *PQ* möglich, wenn der Punct *A* in *PQ* mit dem Berührungspuncte des Kreises zusammenfällt. — Wird der gegebene Kreis von der Geraden geschnitten, so giebt es wieder zwei Auflösungskreise, welche auf entgegengesetzten Seiten von *PQ* liegen.

Aufgabe VI. *K*, *PK*.

Es sind zwei Kreise gegeben und in der Peripherie des einen ein Punct; man soll einen Kreis beschreiben, welcher beide berührt, den einen in dem gegebenen Puncte.

Auflösung 1. (Fig. 25.)

Diese entspringt aus folgender Analysis. I. *C* und *A* seien die Mittelpuncte der gegebenen Kreise, *CB*, *AE* deren Halbmesser; jener Kreis sei der grössere und *B* der gegebene Punct in seiner Peripherie. Es sei zunächst der Kreis *BEH*, welcher die gegebenen ausschliesslich berührt, der gesuchte und *F* sein Mittelpunct.

Der verlängerte Halbmesser *CB* ist der geometrische Ort für den Mittelpunct des gesuchten Kreises, da dieser mit dem Berührungspuncte und *C* in gerader Linie liegen muss (Satz 6). Denkt man sich ferner die Centrale *AF* gezogen, so geht dieselbe durch den Berührungspunct *E* der Kreise um *A* und *F*. Wären die gegebenen Kreise gleich, also $BC = EA$, so würde das $\triangle ACF$ gleichschenklig, also $FA = FC$ sein; da aber $CB > AE$, so würde, wenn man $BD = EA$ nähme und *AD* zöge, $\triangle ADF$ auch gleichschenklig sein, folglich das durch die Mitte *G* der Verbindungslinie *AD* auf ihr errichtete Perpendikel die Gerade *CI* in dem gesuchten Puncte *F* durchschneiden, indem nun $FB = FE$ Radien des gesuchten Kreises sind. Nimmt man ferner an, ein zweiter Kreis *BE'L* berühre den grösseren einschliessend in *B*, den anderen ausschliessend in *E'*, so folgert man leicht, wie vorhin, dass für $BD' = AE$ das $\triangle AD'F'$ gleichschenklig sein muss und der Mittelpunct *F'* sich als Spitze desselben durch die Senkrechte *G'F'* auf der Mitte von *AD'* herausstellt.

Dies führt zu folgender Construction:

„Man ziehe den Radius CB und verlängere ihn nach I und L. Auf FC nehme man BD = BD', ziehe AD, AD', halbire jene in G, diese in G' und errichte die Perpendikel GF, G'F', welche so weit zu verlängern sind, bis sie die CI in F und F' schneiden; dann ist der um F mit FB beschriebene Kreis BEH derjenige, welcher die gegebenen von aussen berührt und der um F' mit F'B = F'E' beschriebene Kreis ein zweiter, welcher den einen gegebenen in B von innen, den andern in E' von aussen berührt."

Der Beweis lässt sich leicht hieraus entnehmen.

II. Ist Fig. 26 *C* der kleinere, *A* der grössere Kreis und liegt der gegebene Berührungspunct *B* in der Peripherie des kleineren Kreises *C*, so trage man auf die durch *C* und *B* gezogene Gerade den Halbmesser des grösseren Kreises *AE* von *B* nach *D* und *D'*, dass also $BD = BD' = AE$, ziehe *AD*, *AD'*, halbire jene in *G*, diese in *G'* und errichte die Perpendikel *GF*, *G'F'* auf *AD* und *AD'*, welche die Gerade *LI* in *F* und *F'* treffen. Dann sind *F* und *F'* die Mittelpuncte zweier Kreise, welche die Aufgabe lösen und man sieht, dass dieser Fall von dem vorigen nicht wesentlich verschieden ist.

Auflösung 2. (Fig. 27.)

Sind A und C die gegebenen Kreise und B der gegebene Punct im Umfange, so ziehe man $DD' \# AB$ und verbinde die Endpuncte des Durchmessers DD' mit B; dann sind die Durchschnitte E und E' die beiden Berührungspuncte, durch welche sich die Mittelpuncte F, F' der gesuchten Kreise sogleich ergeben.

Beweis. Da $DD' \# FF'$, so ist $\triangle CD'E' \sim \triangle FBE'$, folglich hat man

$$CD' : CE' = FB : FE',$$

da nun $CD' = CE'$, so folgt $FE' = FB$. Ebenso ist $\triangle CDE \sim \triangle EBF'$, folglich wiederum

$$CD : CE = BF' : EF' \text{ u. s. w.}$$

Discussion. In Beziehung auf die Auflösung I. Fig. 25 lassen sich folgende Puncte hervorheben.

1) Die Auflösung hängt davon ab, dass die Linien DI und GF sich in irgend einem Puncte F schneiden; findet daher dieser Durchschnitt nicht statt, d. h. sind DI, GF parallel, so wird die Aufgabe offenbar unmöglich. Die Lage, welche der Punct B in diesem Falle haben müsste, lässt sich leicht bestimmen. Man beschreibe (Fig. 28) über der Centrale CA einen Halbkreis CPA und trage in denselben eine Sehne $CP =$ der Differenz der Halbmesser $CB - AE$. Verlängert man CP bis an den Umkreis nach $B_,$, so bestimmt sich dieser Punct $B_,$ als derjenige, welcher die Aufgabe unmöglich macht; denn zieht man AP und durch deren Mitte G das Perpendikel GF auf AP, so können $CB_,$ und GF sich nicht schneiden, weil $\angle CPA = R$, also auch dessen Nebenwinkel $GPB_, = R$, folglich $PB_, \# GF$ ist.

2) Im Umkreise von C giebt es aber noch einen zweiten Punct $B_{,,}$, welcher nicht als Berührungspunct gegeben sein darf. Man findet ihn, wie vorhin, wenn man über AC den Halbkreis $CP_,A$ beschreibt, die Sehne $CP_, = CB - AE$ macht und $CP_,$ bis an den Umkreis nach $B_{,,}$ verlängert, wo nun $B_{,,}$ aus denselben Gründen der Punct ist, welcher die Aufgabe unmöglich macht.

3) Auf dieselbe Weise bestimmt man die beiden Unmöglichkeitspuncte im Umfange des kleineren Kreises A (bei der Auflös. II. Fig. 26), sobald man nur die Differenz der Halbmesser von A aus auf den über AC beschriebenen Kreis nach entgegengesetzten Richtungen als Sehne trägt.

4) Bisher sind die gegebenen Kreise als aus einander liegend betrachtet. Nehmen wir nun an, die Kreise liegen in einander und *B* sei der im Umfange des grösseren *C* gegebene Punct (Fig. 29). Zieht man *BC*, so liegt in dieser Linie der Mittelpunct des gesuchten Kreises; man verlängere *CB* nach *D*, mache *BD* = dem Radius *AE* des inneren Kreises *A*, ziehe *AD* und errichte in deren Mitte *G* das Perpendikel *GF*. Ist *F* der Durchschnitt mit *CD*, so muss der um *F* mit *FB* beschriebene Kreis die gegebenen in *B* und *E* berühren.

Um den zweiten Kreis zu erhalten, welcher die Aufgabe löst, nehme man auf *BC* die $BD' = BD$, ziehe AD' und errichte durch deren Mitte G' das Perpendikel $G'F'$, welches in dem Durchschnittspuncte F' mit *CB* den Mittelpunct dieses zweiten Kreises giebt, welcher mit dem Halbmesser $F'B$ beschrieben, offenbar beide gegebenen Kreise berühren muss.

Man sieht leicht, dass diese Auflösung ganz der obigen analog ist.

Wenn der Berührungspunct *B* im Umfange des kleineren Kreises gegeben ist, so ändert sich die Auflösung nicht wesentlich.

5) Berühren sich die gegebenen Kreise von aussen oder innen, oder schneiden sich dieselben; so wird man auch auf diese Fälle die obige allgemeine Auflösung ausdehnen können, deren weitere Determination dem Leser überlassen bleibe.

Einige Lehrsätze über Kreis-Berührungen.

I. Satz. *Zieht man von den Endpuncten eines Durchmessers in einem Kreise, welcher einen zweiten von aussen berührt, durch den Berührungspunct zwei Gerade, die in der Peripherie des andern enden; so ist die Verbindungslinie dieser Puncte auch ein Durchmesser des zweiten Kreises.* (Fig. 30.)

Beweis. *E* sei der Berührungspunct und *AB* ein Durchmesser des Kreises um *C*; nun seien *AED* und *BEF* gezogen, dann muss *DF* ein Durchmesser sein. Denn da *AEB* ein Halb-

kreis, so ist der Peripheriewinkel AEB ein rechter, also auch der ihm gleiche DEF. Folglich ist DF ebenfalls ein Durchmesser.

Dasselbe gilt auch, wenn sich die beiden Kreise von innen berühren.

Zusatz. Dieser Satz lässt sich auch so aussprechen:

Die Endpuncte paralleler Durchmesser in zwei sich berührenden Kreisen liegen mit dem Berührungspuncte in gerader Linie.

II. Satz. *Die Durchschnittspuncte der Perpendikel in den Eckpuncten eines Dreiecks auf die Halbirungslinien der Winkel geben die Mittelpuncte der drei äussern Kreise, welche die drei verlängerten Seiten des Dreiecks berühren.* (Fig. 31.)

Beweis. Im Dreieck ABC halbire AD den $\angle A$, BE den $\angle B$ und CF den $\angle C$. Auf AD sei GI, auf CF sei GH und auf BE sei HI perpendicular. Nun ist

$$\begin{array}{rl} a+b+x+y &= 2R \text{ und} \\ \underline{b+x \qquad} &\underline{= R,} \text{ folglich} \\ \text{auch } a+y &= R. \end{array}$$

Es ist also $x-y = 0$ oder $x = y$.

Demnach halbirt AG den Nebenwinkel CAK. Ebenso folgt, dass CG den $\angle ACL$ halbirt und also der Durchschnitt dieser beiden Halbirungslinien in G den Mittelpunct des äusseren Kreises giebt, welcher die drei Linien AC, AK und CL d. i. die Verlängerungen der Seiten AB, BC berührt. Dasselbe gilt von den übrigen Ecken B und C.

Anmerkung. Man sieht hieraus, dass auch die Converse dieses Satzes gültig sei.

III. Satz. *Wenn der Durchmesser des kleineren von zwei Kreisen, die sich von innen berühren, gleich dem Halbmesser des grösseren ist, so halbirt* 1) *die Peripherie des kleineren jede Sehne des grösseren, die vom Berührungspuncte ausgeht; auch ist* 2) *der Endpunct jedes Halbmessers im grösseren Kreise vom Durchschnittspuncte desselben mit der Peripherie des kleineren und der gemeinschaftlichen Tangente gleich weit entfernt.* (Fig. 32.)

Beweis. 1) Die Kreise A und C mögen sich in B berühren. Nun sei aus B eine beliebige Sehne BF im grösseren Kreise C gezogen, welche die Peripherie des kleineren in E schneidet; zieht man CE, CF, so ist CEB ein Winkel im Halbkreise, also $= R$, und weil $CB = CF$, $CE = CE$, so folgt, dass $\triangle BCE \cong \triangle CEF$ und mithin $BE = EF$ sein muss.

2) Zieht man beliebig einen Halbmesser CF, welcher die Peripherie des kleinern Kreises in G schneidet und legt an B die

Tangente *BD*, so muss das Perpendikel *FD* auf *BD* dem Abstande *FG* gleich sein. Denn man ziehe *BG*, so ist $y = z$ und, da sowohl *CB* als *FD* senkrecht auf *BD*, auch $y = x$, folglich $z = x$. Hieraus folgt $\triangle BGF \cong \triangle BFD$; daher ist $FG = FD$.

IV. Satz. *Wird ein Kreis vom Durchmesser AE von einem zweiten um B im Puncte A von innen berührt und eine Sehne AD des grösseren aus dem Berührungspuncte A von dem Berührungskreise in F halbirt, so geht dieser durch den Mittelpunct des andern.* (Fig. 33.)

Beweis. Es sei *AC* der Durchmesser des Berührungskreises. Zieht man *CF*, so ist der Winkel *CFA* ein Peripheriewinkel im Halbkreise, also ein rechter; folglich steht *FC* senkrecht auf der Sehne *AD* in deren Mitte *F* und muss deshalb durch den Mittelpunct *C* des grösseren Kreises vom Durchmesser *AE* gehen, in welchem der Mittelpunct liegt, mithin, da beide Linien *AE* und *FC* nur einen Punct *C* gemein haben, so ist *C* nothwendig Mittelpunct des grösseren Kreises.

V. Satz. *Wenn man aus den Mittelpuncten zweier sich von aussen berührender Kreise nach entgegengesetzten Richtungen parallele Halbmesser zieht, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpuncte durch den Berührungspunct.* (Fig. 34.)

Beweis. Sind *A* und *C* die Mittelpuncte der beiden sich berührenden Kreise und ist *E* der Berührungspunct, so ist *AEC* eine gerade Linie (Eukl. III. S. 12). Nun ziehe man beliebig $AB \parallel CD$ und *BE*, *ED*, so muss *ED* mit *BE* in gerader Linie liegen. Denn da $AB \parallel CD$ und die *AC* sie schneidet, so ist $\angle A = C$, folglich weil $AB = AE$, auch $o = u$. Ebenso ist $\triangle ECD$ gleichschenklig, als $x = y$. Hieraus folgt leicht, dass $x = u$ sei. Demnach muss (Eukl. I. S. 15, Converse) *BE* mit *ED* in einer geraden Linie liegen, wobei x und u Scheitelwinkel bilden.

VI. Satz. *Zieht man durch den Berührungspunct zweier sich von aussen oder von innen berührender Kreise eine gerade Linie, welche in beiden Umkreisen endigt, so sind die beiden Radien von den Durchschnittspuncten parallel.* (Fig. 35.)

Beweis. *A* und *C* seien die Centra der beiden in *B* sich berührenden Kreise; die Centrale *AC* geht dann durch den Berührungspunct *B*. Nun sei willkürlich die *DE* durch *B* gezogen, so erhält man durch die Halbmesser *AD*, *CE* gleichschenklige Dreiecke

ADB, *BCE*. Da hier zwei gerade Linien *DE*, *AC* sich schneiden, so sind die Scheitelwinkel bei *B* gleich, woraus hervorgeht, dass den gleichen Basiswinkeln auch gleiche Winkel an den Spitzen *A*, *C* entsprechen. Demnach müssen *AD* und *CE* $\#$ sein.

Dasselbe gilt von zwei sich innerhalb berührenden Kreisen.

VII. Satz. *Wenn man durch den Berührungspunct zweier Berührungskreise zwei Gerade zieht, die beide Umkreise noch einmal schneiden, so bilden die Verbindungslinien jedes Paares in demselben Kreise entstandener Durchschnittspuncte parallele Linien.* (Fig. 36.)

Beweis. Die Kreise *AEB*, *BDF* mögen sich in *B* berühren; man habe die Geraden *AD*, *EF* durch *B* gezogen und deren Endpuncte *A*, *E*, sowie *D*, *F* verbunden.

Man ziehe nun durch *B* eine beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente *MN*; so ist (Eukl. III. S. 32) $\angle x = z$ und $\angle y = u$. Da aber die Scheitelwinkel x und y gleich sind, so müssen auch z und u gleich sein. Demnach werden die Linien *AE* und *DF* von der *EF* so geschnitten, dass sie die Wechselwinkel z und u gleich macht, weshalb (Eukl. I. S. 27) *AE* $\#$ *DF*.

Dasselbe gilt auch von zwei Kreisen, welche sich von innen berühren.

VIII. Satz. *Haben zwei Kreise BEL und OHL einen Punct L gemein und können durch diesen zwei Secanten BH, EO in beiden Kreisen so gezogen werden, dass die Verbindungssehnen BE, OH parallel sind, so berühren sich diese Kreise in dem gemeinschaftlichen Puncte L.* (Fig. 37.)

Beweis. An den Kreis *BEL* lege man in *L* eine Tangente *LT*; so ist $\angle BLT = E$ (Eukl. III. S. 32). An den Kreis *OLH* lege man ebenfalls eine Tangente *LS*, so ist $\angle SLH = O$. Da nun $\angle O = \angle E$, so muss auch $\angle BLT = SLH$ sein. Es ist aber *BLH* eine gerade Linie, folglich muss *TLS* auch eine Gerade sein, d. h. die Linie *ST* ist eine beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente für denselben Punct *L*, welche sich daher in dem einzigen Puncte *L* berühren müssen.

Nimmt man den einen Kreis innerhalb des grösseren an, so gelten dieselben Schlüsse.

IX. Satz. *Wenn man durch die Endpuncte der Parallel-Seiten eines Trapezes und durch den Durchschnittspunct der Dia-*

gonalen, oder der beiden convergirenden Seiten Kreise legt; so berühren sich diese Kreise entweder in dem Durchschnittspuncte der Diagonalen oder im Convergenzpuncte. (Fig. 38.)

Beweis. I. Theil. *ABCD* sei das Trapez, wo *AB* ⫲ *CD* und *E* der Durchschnitt der Diagonalen *AC*, *BD*; durch die drei Puncte *D*, *C*, *E*, sowie durch *A*, *B*, *E* seien Kreise beschrieben. Da die beiden Kreise einen Punct *E* gemein haben, die Sehnen *DC*, *AB* parallel sind, und die Secanten *AC*, *BD* durch den gemeinschaftlichen Punct *E* gehen, so folgt aus vorigem Satze, dass beide Kreise in *E* sich von aussen berühren müssen.

II. Theil. (Fig. 39.) Die convergirenden Seiten *AD*, *BC* mögen verlängert in *E* zusammentreffen; durch die Puncte *D*, *C*, *E*, sowie durch *A*, *B*, *E* seien Kreise gelegt, welche also den Punct *E* gemein haben. An den Kreis *CDE* lege man in *E* die Tangente *EF*, so ist *FEC* = ∠ *D*. Ferner lege man an den Kreis *ABE* in *E* eine Tangente *EG*, so ist *GEB* = ∠ *A*. Da nun *e. h.* ∠ *D* = *A*, so muss auch *GEB* = *FEB* sein; demnach fallen beide Linien *EF*, *EG* in eine zusammen und beide Kreise haben also in *E* eine gemeinschaftliche Tangente und berühren sich mithin im Puncte *E*.

X. Satz. *Wenn ein Halbkreis AED eine Kathete AB eines rechtwinkligen Dreiecks BAC im Scheitel des rechten Winkels A berührt und zugleich die Hypotenuse BC in E, und wenn die berührte Kathete AB nach F um sich selbst verlängert wird, so liegt der Endpunct der Verlängerung F mit dem Berührungspuncte E und dem Endpuncte des Halbkreises D auf der anderen Kathete in einer geraden Linie.* (Fig. 40.)

Beweis. Man ziehe *AE*, so ist *AED* ein rechter Winkel. Nun sind die Tangenten *BE*, *BA* gleich gross, folglich ist im Δ *AEF*: *AB* = *BF* = *BE*; daher ∠ *AEF* auch ein rechter. Demnach liegt *FE* mit *ED* in gerader Linie.

XI. Satz. *Wenn man durch den Berührungspunct zweier sich berührenden Kreise eine Gerade AB legt und zieht durch deren Durchschnittspuncte mit den Umkreisen parallele Sehnen, so geht die Verbindungslinie der beiden neuen Durchschnittspuncte durch den Berührungspunct.* (Fig. 41.)

Beweis. *E* sei der Berührungspunct und *AC* ⫲ *BD*; dann ist ∠ *A* = *B*, folglich, wenn die gemeinschaftliche Tangente *FG* gezogen wird, *DEF* = *CEG*. Demnach ist *CED* eine gerade Linie.

XII. Satz. *Zieht man im grösseren von zwei Kreisen, die sich von innen berühren, eine Sehne, welche Tangente am kleineren ist, und verbindet deren Endpuncte und ihren Berührungspunct mit dem der beiden Kreise, so wird der von den beiden ersten Linien gebildete Winkel durch die dritte halbirt.* (Fig. 42.)

Beweis. Die Kreise AFB und EDB mögen sich in B berühren; die Sehne AF berühre den kleineren Kreis in D; zieht man nun FB, DB, AB, so ist zu beweisen, dass BD den Winkel ABF halbire. Da die Linien BF, BA den kleineren Kreis in G und E schneiden, so ist (nach Satz VII.) $EG \# AF$, folglich sind, einem bekannten Lehrsatze aus der Kreislehre gemäss, die Bogen ED und DG gleich. Demnach sind auch die auf diesen Bogen stehenden Peripheriewinkel a und b gleich.

XIII. Satz. *Wird im grösseren von zwei Kreisen, die sich von aussen in C berühren, eine Sehne AB gezogen, welche verlängert den kleineren in D berührt, und man verbindet die Endpuncte der Sehne mit dem gemeinschaftlichen Berührungspuncte C; so ist die beide Berührungspuncte verbindende Gerade CD die Halbirungslinie des Aussenwinkels BCF.* (Fig. 43.)

Beweis. Man lege an beide Kreise die gemeinschaftliche Tangente CE und ziehe DF; so ist

$$\alpha = a$$
$$\beta = b$$
$$\text{folglich } \alpha+\beta = a+b.$$

Es ist aber auch $m = a+b = y$ und $\alpha+\beta = x$; daher ist

$$x = y.$$

XIV. Satz. *Um drei sich einander gleichartig berührende Kreise zu construiren, deren Mittelpuncte die Eckpuncte eines gegebenen Dreiecks ABC sind, trage man die kleinere Seite CB auf die grössere CA nach D, den Rest AD auf die anliegende Seite nach E und halbire den Rest EB in F, so ist F der Berührungspunct der um A und B beschriebenen Kreise. Wird ferner BG = BF und AF = AH gemacht, so sind G und H die andern Berührungspuncte.* (Fig. 44.)

Beweis. Aus B ist mit BF der erste Kreis und aus A mit AF der zweite beschrieben. Es ist also $BF = BG$ und $AF = AH$; man hat daher nur nachzuweisen, dass $CG = CH$ sei. Weil nun CB oder $CG + GB = CD = CH + HD$ und $EF = DH$ ist, so folgt $CG = CH$.

XV. Satz. *Sollen aus den Ecken eines Dreiecks ABC, als Mittelpuncten, drei sich ungleichartig berührende Kreise* (d. i. solche, wo der eine die beiden anderen einschliesst) *beschrieben werden, so verlängere man die Seiten AB, AC, trage die grössere AB auf die kleinere AC nach D, mache den Ueberschuss $CD = CE$ auf der anliegenden Seite CB und halbire den Rest BE in F; so ist F der Berührungspunct der Kreise um B und C und macht man $BG = BF$, sowie $CH = CF$, so sind G und H die Berührungspuncte des Kreises um A.* (Fig. 45.)

Beweis. Dass die um B und C resp. mit den Halbmessern BF, CF beschriebenen Kreise sich in F berühren müssen, ist klar; es ist also nur darzuthun, dass auch $AG = AH$ sei.

Nun ist
$$\begin{aligned} AB + BF &= AD + CF - CE, \text{ oder} \\ AB + BG &= AD + CH - CD \\ &= AD + DH, \text{ d. i.} \\ AG &= AH. \end{aligned}$$

Zusatz. Es ist bemerkenswerth, dass bei dieser Berührung der grösste, die beiden andern von innen berührende Kreis aus jeder Ecke beschrieben werden kann und dass diese drei Kreise von gleicher Grösse sind, da jeder den halben Umfang des Dreiecks zum Halbmesser hat.

Denn man setze $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$ und $BF = BG = x$; so ist $CF = CH = a - x$, daher $AG = c + x$ und $AH = b + a - x$, also $c + x = b + a - x$, woraus folgt:

$$x = \frac{a + b - c}{2} \text{ und deshalb } AG = \frac{a + b + c}{2}.$$

Trägt man AC auf CB nach I, BI auf BA nach K und halbirt AK in L, so ist L der Berührungspunct der Kreise um A und B. Sei $AL = y$, also $BL = BM = c - y$, dann ist $CM = a + c - y$ und $CN = b + y$, folglich $a + c - y = b + y$. Hieraus ergiebt sich $y = \frac{a + c - b}{2}$, daher ist $CN = CM = b + y = \frac{a + b + c}{2}$, wie vorhin u. s. w.

XVI. Satz. *Sind aus den Eckpuncten eines Dreiecks drei einander berührende Kreise beschrieben, so liegen deren Berührungspuncte im Umfange des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises.* (Fig. 46.)

Beweis. Im $\triangle ABC$ seien D, E, F die Berührungspuncte, oder es sei $AD = AF$, $BD = BE$ und $CE = CF$; so ist zu beweisen, dass dieselben Puncte zugleich die Berührungspuncte des innern Berührungskreises sind.

Man halbire die Winkel A und B durch AG, BG, deren Durchschnitt G sei und ziehe GD, GE, GF; dann ist $\triangle ADG \cong \triangle AGF$, folglich $GD = GF$ und $x = x_,$; ferner ist $\triangle DGB \cong \triangle BGE$; daher $GD = GE$ und $y = y_,$. Hieraus folgt, dass $GD = GF = GE$ und, wenn CG gezogen, auch, dass $\triangle FGC \cong GCE$ sei. Demnach ist

$$z = z_,\text{, und man hat}$$
$$2x + 2y + 2z = 6R\text{, oder}$$
$$x + y + z = 3R.\text{ Nimmt man davon}$$
$$\underline{y + z = 2R}\text{, so bleibt}$$
$$x = R.$$

Ebenso folgt, dass $y = z = R$ und es muss daher der um G mit GF beschriebene Kreis die Seiten des Dreiecks ABC in D, E, F berühren.

XVII. Satz. *Wenn im Dreieck ABC die um B und C beschriebenen Kreise sich in F, und der um A mit AD beschriebene Kreis jene in D, E berührt; so sind D, F, E die Berührungspuncte des Kreises G, welcher die Seiten des Dreiecks (AB, AC verlängert) von aussen berührt.* (Fig. 47.)

Beweis. Man halbire die Winkel A und BCE durch AG, CG, welche sich in G treffen und ziehe GD, GF, GE; dann ist $\triangle ADG \cong \triangle AGE$ (weil $AD = AE$, $AG = AG$ und $\angle \alpha = \beta$), folglich ist $o = u$ und $GD = GE$. Ferner ist $\triangle ECG \cong \triangle CGF$ (weil $CE = CF$, $\angle m = n$ und $CG = CG$; daher ist $GF = GE$ und $u = u_,$. Hieraus folgt weiter, dass $\triangle BFG \cong \triangle BGD$ (da $DG = FG$, $BG = BG$ und $BD = BF$) und also $o = o_,$, mithin auch $o_, = u_, = R$ ist. Es steht demnach DG auf AD, FG auf BC und EG auf AE senkrecht und ist G der Mittelpunct des äusseren Berührungskreises.

XVIII. Satz. *Berühren sich zwei Kreise von innen und man errichtet auf dem Durchmesser des kleineren Perpendikel bis zur Peripherie des grösseren, so verhalten sich die aus dem Berührungspuncte nach den Perpendikeln gezogenen Sehnen in dem einen Kreise, wie die entsprechenden in dem andern.* (Fig. 48.)

Beweis. AFB und AEC seien zwei in A sich berührende Kreise; auf dem Durchmesser AC des kleineren seien die Perpen-

dikel DF, GI errichtet und die Sehnen AF, AI, AE, AH gezogen; so ist $AF:AI = AE:AH$. Denn nach Eukl. VI. S. 8. Zus. hat man $AB:AF = AF:AD$, oder $AF^2 = AB.AD$. Ebenso ist $AI^2 = AB.AG$, und $AE^2 = AC.AD$, sowie $AH^2 = AC.AG$. Es bestehen demnach folgende Proportionen:

$$AF^2 : AI^2 = AD : AG$$
$$AE^2 : AH^2 = AD : AG.$$ Daraus folgt leicht
$$AF : AI = AE : AH.$$

XIX. Satz. *Wenn drei Kreise einander berühren, so treffen die drei für je zwei Kreise gemeinschaftlichen Tangenten, genugsam verlängert, in einerlei Punct zusammen.* (Fig. 49.)

Beweis. 1. Fall. Die drei Kreise berühren sich von aussen gleichartig.

Sind A, B, C drei Kreise, welche sich in D, E, F berühren und man verbindet ihre Mittelpuncte, so entsteht das $\triangle ABC$, in dessen Seiten die Berührungspuncte liegen. Errichtet man nun auf den Seiten in den Berührungspuncten die Perpendikel DO, EO, FO, so müssen sich diese in einem und demselben Puncte O schneiden, da dieser offenbar der Mittelpunct des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises ist, welcher (nach Satz VIII.) die Seiten des $\triangle ABC$ in D, E, F berührt.

2. Fall. (Fig. 50.) Die Kreise A, B, C berühren sich ungleichartig in D, E, F. Verbindet man die Mittelpuncte dieser Kreise, so entsteht das $\triangle ABC$. Nun sind nach (S. 17) die Berührungspuncte D, E, F der Kreise zugleich diejenigen, durch welche ein äusserer Berührungskreis des $\triangle ABC$ geht. Da nun der Mittelpunct solches Kreises, welcher die verlängerte Seite AB in D berührt, nothwendig in der auf AD senkrechten DO liegen muss und ebenso in den Perpendikeln EO, FO; so muss gedachter Mittelpunct in allen drei Linien zugleich befindlich sein, d. h. die gemeinschaftlichen Tangenten DO, EO, FO schneiden sich in einem und demselben Puncte O.

XX. Satz. *Bei jedem Vierecke um einen Kreis (wie ABCD) ist die Summe jeder zwei Gegenseiten gleich gross.* (Fig. 51.)

Beweis. Der Kreis M berühre die Seiten in E, G, I, F, dann ist

$$AE = AF$$
$$BE = BG$$
$$DI = DF$$
$$CI = CG, \text{ folglich addirt:}$$
$$\overline{AB+CD = AD+BC.}$$

Anmerkung. Aus dieser Gleichung folgt auch:

$$CD - CB = AD - AB$$

d. h. bei einem Tangenten-Vierecke ist der Unterschied zwischen zwei anstossenden Seiten dem Unterschiede zwischen den beiden anderen anliegenden Seiten gleich.

XXI. Satz. *Wenn in einem Vierecke die Summe zweier Gegenseiten ebenso gross ist, als die der beiden anderen, so lässt sich in dasselbe ein Berührungskreis beschreiben.* (Fig. 52.)

Beweis. Es sei im Vierecke $ABCD$:

$$AB+DC = AD+BC.$$

Man beschreibe nun einen Kreis M, welcher die Seiten DA, AB, BC berührt (indem man die beiden Winkel A und B halbirt u. s. w.). Dieser Kreis muss auch die vierte Seite DC berühren; denn gesetzt DC läge ausserhalb M, so ziehe man von D eine Tangente DH an M, dann würde nach vorigem Satze

$$AB+DH = AD+BH \text{ sein. Es ist}$$
$$\text{aber } AB+DC = AD+BC, \text{ folglich ist auch}$$
$$\overline{DC-DH = BC-BH} \text{ oder}$$
$$DC-DH = CH,$$

d. h. in dem Dreiecke DCH müsste der Unterschied der beiden Seiten DC und DH der dritten CH gleich sein, welches unmöglich ist. Ebenso kann bewiesen werden, dass der Kreis M die Seite DC nicht schneidet; mithin berührt M auch die DC.

XXII. Satz. *Sind aus den vier Eckpuncten eines Tangentenvierecks vier Kreise beschrieben, von denen jeder zwei andere berührt, so liegen die vier Berührungspuncte in der Peripherie eines Kreises.* (Fig. 53.)

Beweis. $ABCD$ sei das Tangentenviereck; F, G, H, E seien die Berührungspuncte der um A, B, C, D beschriebenen Kreise; man ziehe EF, FG, GH, HE, so ist zu beweisen, dass $EFGH$ ein Sehnenviereck sei. Zu diesem Ende errichte man in den Berührungspuncten F und H auf AB, CD die Perpendikel FK, HI, welche also gemeinschaftliche Tangenten der Kreise A und B, sowie C und D sind.

Nun ist (Eucl. III. S. 32.)

$$\angle o = \tfrac{1}{2} A$$
$$u = \tfrac{1}{2} B$$
$$x = \tfrac{1}{2} C$$
$$y = \tfrac{1}{2} D$$

folglich $o + u + x + y = \frac{A+B+C+D}{2} = 2R$

oder im Viereck $EFGH$ ist

$$EFG + GHE = 2R;$$

demnach lässt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

XXIII. Satz. *Wenn sich mehrere Kreise in demselben Puncte berühren, und man beschreibt aus einem beliebigen Puncte der gemeinschaftlichen Tangente einen Kreis, welcher jene Kreise durchschneidet; wenn man ferner aus dem Mittelpuncte nach diesen Durchschnittspuncten Radien zieht, welche verlängert die Kreise abermals schneiden: so liegen diese zweiten Durchschnittspuncte alle in der Peripherie eines dem vorigen concentrischen Kreises.* (Fig. 54.)

Beweis. Die Kreise P, Q, S mögen sich in dem Puncte A berühren. Aus dem Puncte B der gemeinschaftlichen Tangente AB sei der Kreis CDE beschrieben, welcher den Kreis P in C, den Q in D und den S in E schneide. Die verlängerten Radien BC, BD, BE mögen die Kreise zum zweiten Male in F, G, H schneiden, so müssen diese Puncte in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunct B ist. Denn nach Eucl. III. S. 36 ist

$$AB^2 = BF \cdot BC = BG \cdot BD = BH \cdot BE.$$

Aus $BF \cdot BC = BG \cdot BD$ folgt aber, dass

$BF : BG = BD : BC$; daher ist $BF = BG$,

weil $BD = BC$. Da ferner:

$BG \cdot BD = BH \cdot BE$, so folgt

$BG : BH = BE : BD$, daher ist $BG = BH$.

Demnach sind die Radien BF, BG, BH alle gleich u. s. w.

XXIV. Satz. *Wird in und um ein gegebenes Dreieck ABC ein Kreis beschrieben und von einer Ecke A durch den Mittelpunct O des inneren Kreises eine Gerade AD bis an den Umkreis des äusseren gezogen: so geht der mit CD oder DB um D beschriebene Kreis durch die Endpuncte der Basis CB und den Mittelpunct O des Berührungskreises.* (Fig. 55.)

Beweis. Man ziehe BO, CO, DB, DC. Da die Winkel A und B durch AO, BO halbirt werden, so ist $o = t$ und $x = y$. Nun ist der Bogen $BD = DC$, also $v = u$ und da die Peripheriewinkel o und v auf demselben Bogen BD stehen, so ist auch $o = v = u$. Ferner ist der Aussenwinkel $a = o + y$ oder $= o + x$, daher $a = x + u$ und mithin $DO = DB = DC$. Demnach geht der um D mit DB beschriebene Kreis durch die drei Puncte B, O, C.

Zusatz. Hieraus folgt, dass der Bogen BOC der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Kreise sei, welche um die Dreiecke beschrieben werden können, deren eine Seite BC ist und deren Scheitel in dem Bogen BAC liegen.

XXV. Satz. *Ist in einem Dreieck ABC ein Kreis beschrieben, welcher die Seiten AB, AC in F, G berührt; ist ferner B mit dem Centro O verbunden und CH senkrecht auf BO; so liegen die Puncte F, G, H in gerader Linie.* (Fig. 56.)

Beweis. Man beschreibe um ABC einen Kreis, verlängere BO nach D, ziehe OF, OG, EG, EF und CD. Kann bewiesen werden, dass HG mit GF in gerader Linie liegt, oder, dass $\angle CGH = FGA$, so ist der Satz bewiesen. Nun ist $\angle A = D$, folglich, wenn CO gezogen ist, so ist $\triangle CDO \sim \triangle AFG$, da $DC = DO$ (Satz XXIV). Also ist $AFG = AGF = \frac{1}{2} FOG$ und ebenso $DOC = DCO = AFG = \frac{1}{2} FOG$. Es lässt sich daher um das Viereck $COGH$ ein Kreis beschreiben, weshalb $COD = CGH$. Mithin ist $CGH = FGA$, also HGF eine gerade Linie.

Hülfssatz A. *Durchschneiden sich drei Transversalen eines Dreiecks innerhalb in einem Puncte, so sind die beiden Producte aus den getrennten Abschnitten der Seiten einander gleich.* (Fig. 57.)

Beweis. In dem Puncte M des Dreiecks ABC mögen sich die drei Geraden AD, BE, CF durchschneiden. Aus A und B fälle man auf die Transversale CF die Perpendikel AP, Bp, so hat man

$$\triangle AMC : BMC = AF : BF \ (= AP : Bp), \text{ sowie}$$
$$\triangle BMC : AMB = CE : AE$$
$$\triangle AMB : AMC = DB : CD, \text{ folglich}$$
$$1 : 1 = AF.BD.CE : BF.CD.AE.$$

Daher ist $AF.BD.CE = BF.CD.AE$.

Hülfssatz B. *Wenn innerhalb eines Dreiecks ABC die drei Transversalen AG, BD, CF aus den drei Eckpuncten nach den Gegenseiten die letztern so theilen, dass*

$$AF.BG.CD = BF.CG.AD$$

ist, so schneiden sich jene Linien in einem Puncte. (Fig. 58.)

Beweis. Gesetzt, die Linien schnitten sich, wie es die Figur darstellt, nicht in Einem Puncte, so ziehe man aus C durch den Durchschnitt M der beiden Transversalen AG, BD die CMF', welche die Seite AB in F' treffe. Nun ist

1) $AF.BG.CD = BF.CG.AD$ (ex hyp.) und

2) $AF'.BG.CD = BF'.CG.AD$ (ex constr.).

Aus 1) folgt: $\frac{CG.AD}{BG.CD} = \frac{AF}{BF}$.

Aus 2): $\frac{CG.AD}{BG.CD} = \frac{AF'}{BF'}$.

Es müsste also sein:

$$AF : AF' = BF : BF'$$

d. h. das Grössere verhält sich zum Kleinern, wie das Kleinere zum Grössern, welches unmöglich ist.

Anmerkung. Der erste dieser beiden Sätze ist der bekannte Lehrsatz von Bernoulli, dessen Umkehrung (Hülfssatz B.) nur dann allgemein gültig ist, wenn ausser der Gleichheit jener Producte noch feststeht, dass entweder 1) alle drei Transversalen innere sind, oder 2) dass eine innere und eine äussere Transversale sich schneiden, und dass die dritte Transversale eine äussere sein muss. (Vergl. Dr. Boner's Berichtigung der Umkehrung von Bernoulli's Satz über die Transversalen am geradlinigten ebenen Dreiecke. Münster 1851.)

XXVI. Satz. *Die von den drei Eckpuncten eines Dreiecks nach den Berührungspuncten des inbeschriebenen Kreises gezogenen Transversalen scheiden sich in einem und demselben Puncte.* (Fig. 59.)

Beweis. Es seien im $\triangle ABC$ die Berührungspuncte des eingeschriebenen Kreises: D, E, F, und die Geraden BE, CD, AF gezogen. Da allemal die Tangenten gleich sind, welche von demselben Puncte an den Kreis gehen (s. oben Nr. 5), so ist:

$$AD : AE = 1 : 1$$
$$BF : BD = 1 : 1$$
$$CE : CF = 1 : 1, \text{ folglich:}$$
$$\overline{AD.BF.CE : AE.BD.CF = 1 : 1.}$$

Daher ist $AD.BF.CE = AE.BD.CF$,

mithin schneiden (nach Hülfss. B.) die drei Geraden AF, BE, CD sich in einem und demselben Puncte O.

XXVII. Satz. *Wenn drei Kreise in einer Ebene liegen und man bestimmt zu je zweien den Durchschnittspunct der Centrale und gemeinschaftlichen Tangente auf einerlei Seite beider Kreise, so liegen diese drei Durchschnittspuncte in einer geraden Linie.* (Fig. 60.)

Beweis. Es sei E der Durchschnitt der Centrale und Tangente der Kreise B und C, F der von A und C. Kann nun bewiesen werden, dass der Durchschnitt der Centrale und Tangente von A und B in die Verlängerung von EF fällt, so ist der Satz dargethan; oder, was auf eins hinausläuft: wenn vom Durchschnitt D der Centrale von A und B mit der verlängerten EF an B eine Tangente DH gezogen und aus dem Centro A ein Perpendikel p auf die verlängerte DH gezogen wird, so muss dasselbe gleich dem Halbmesser a des Kreises A und also DH gemeinschaftliche Tangente für A und B sein.

Man ziehe $BG \# AF$, so ist:

$$EC : EB = c : b = CF : BG.$$

Da nun $a : c = AF : CF$, so folgt

$a : b = AF : BG$. Da ferner

$AD : BD = AF : BG$, so ist auch

$$a : b = AD : BD.$$

Es sind aber p und b Perpendikel auf DH; daher ist

$$p : b = AD : BD,$$

mithin ist $p = a$. Hieraus ergiebt sich nun leicht die Richtigkeit des Satzes.

Anderer Beweis. Sind D, E, F die drei Durchschnittspuncte der Tangenten, so liegen diese mit den Mittelpuncten der Kreise, zu denen sie gehören, in gerader Linie.

Es ist also: $AD : DB = a : b$

$BE : EC = b : c$

$CF : AF = c : a$, daher

$$AD . BE . CF : DB . EC . AF = 1 : 1;$$

folglich liegen die drei Puncte D, E, F (Lehrsatz des Menelaus nebst Converse) in einer geraden Linie.

Erklärung. Unter dem Aehnlichkeitspuncte zweier beliebig liegenden Kreise versteht man einen Punct in der Centrale beider Kreise, dessen Abstände von den Mittelpuncten sich wie die Halbmesser verhalten.

XXVIII. Satz. 1. *Jede aus einem der Aehnlichkeitspuncte (A) zweier Kreise B und C gezogene Secante AI, schneidet von den*

Kreisen ähnliche Segmente ab, d. h. die den ähnlichen Bogen GI, FH entsprechenden Centriwinkel sind gleich, und die an die Endpuncte der ähnlichen Bogen gezogenen Radien sind paarweise parallel.

2. *Zieht man aus einem ausserhalb eines der Kreise liegenden Aehnlichkeitspuncte eine Tangente an den einen Kreis, so ist sie auch Tangente an den anderen Kreis.* (Fig. 61.)

Beweis ad 1. Auf AI fälle man die Perpendikel BE, CD und ziehe die Radien BI, BG, CH, CF. Da A ein Aehnlichkeitspunct der Kreise B und C ist, so hat man:

$$AB : AC = BI : CH. \text{ Nun ist}$$
$$AB : AC = BE : CD, \text{ folglich}$$
$$\overline{BI : BE = CH : CD.}$$

Da nun in den rechtwinkligen Dreiecken BIE, CHD zwei Seiten proportionirt sind, so sind dieselben (Eukl. VI. S. 7) ähnlich. Daraus folgt: $\angle I = H$. Ebenso folgt, dass $\triangle BEG \sim \triangle CDF$ und $\angle G = F$, folglich ist $CF \# BG$, sowie $CH \# BI$. Demnach sind auch die Centriwinkel IBG, HCF gleich, oder, was einerlei, es sind die Segmente IG, HF ähnlich.

Ad 2. Gesetzt, die von A an den Kreis C gezogene Tangente AS berührte verlängert den andern B nicht, so fälle man aus C und B auf AST die Perpendikel CS, BT. Dann ist

$$AB : AC = BT : CS \ (e.\, c.)$$
und
$$AB : AC = BU : CS \ (e.\, h.), \text{ folglich}$$
$$BT : BU = CS : CS$$

d. h. es muss $BT = BU$ sein. Dieses kann aber nur bestehen, wenn der Punct T mit U zusammenfällt, oder ASU eine gerade Linie ist und welche demnach den Kreis B in U berührt. Wollte man annehmen, die AS verlängert schnitte den Kreis B, so würde sich derselbe Widerspruch ergeben.

Anmerkung. Der Beweis für den Fall, wo der Aehnlichkeitspunct zwischen den Kreisen liegt, wird dem Leser überlassen.

Zusatz. Zieht man von A eine andere beliebige Secante $Afhgi$ und verbindet die Durchschnittspuncte F, f; H, h; G, g; I, i; so ist $Ff \# Gg$, $Hh \# Ii$.

XXIX. Satz. *Berührt ein Kreis zwei andere Kreise, so liegen die beiden Berührungspuncte mit dem äussern oder innern Aehnlichkeitspuncte der zwei letztern Kreise in gerader Linie, je nachdem die Berührungen gleich- oder ungleichartig sind.* (Fig. 62.)

Beweis. Der Kreis *M* berühre die ungleichen Kreise *B*, *C* (von denen *C* der kleinere sei) in *F* und *E*, so ist zu beweisen, dass die durch *F* und *E* gelegte Gerade die verlängerte Centrale *BC* in einem Puncte *A* treffe, welcher der Aehnlichkeitspunct der Kreise *B*, *C* ist.

Gesetzt nun, die durch *F*, *E* gelegte Gerade treffe den Aehnlichkeitspunct *A* nicht, sondern schneide die Centrale in *A'*, so ziehe man von *A* durch den Berührungspunct *E* die Secante *AEI*. Zieht man ferner *MB* und *MC*, so muss nach Satz 5 *BG* ⧺ *MC* sein. Es ist aber auch nach vorigem Satze *EC* ⧺ *BI*; demnach müsste *BI* ⧺ *GB* sein, welches nicht anders möglich ist, als wenn *BI* und *BG* zusammenfallen. Es kann daher die Verlängerung von *FE* in keinen andern Punct als *A* treffen.

Derselbe Beweis passt auch für den Fall, wo der Kreis *M* die anderen *B* und *C* ungleichartig berührt, wozu die folgende Figur 63 dient.

XXX. Satz. *Berühren sich drei Kreise B, C, M von aussen in D, E, F und man verlängert eine Centrale z. B. CB bis zum Durchschnitte A mit der durch die Berührungspuncte F, E gelegten Secante FA, so ist AE : AD = AD : AF.* (Fig. 64.)

Beweis. Durch die Puncte *D*, *E*, *F* beschreibe man einen Kreis, so ist (nach Satz 13) dieser der in das $\triangle$ *CBM* eingeschriebene Berührungskreis, folglich *AD* eine Tangente desselben. Es ist also (Eukl. III. S. 36) *AD* die mittlere Proportionale zwischen *AE* und *AF*.

XXXI. Satz. *Wenn zwei Kreise sich von aussen berühren, so ist:*

1) *von jeder äusseren Tangente das zwischen den Berührungspuncten,*
2) *von der inneren gemeinschaftlichen Tangente das zwischen beiden äusseren liegende Stück*

die mittlere Proportionale zwischen beiden Durchmessern. (Fig. 65.)

Beweis. *M* und *N* seien zwei in *E* sich berührende Kreise; die äusseren Tangenten *BA* und *LA* mögen sich in *A* schneiden, so geht die Centrale verlängert durch *A* und halbirt die innere gemeinschaftliche Tangente *GH* in *E*.

Man verbinde die Berührungspuncte *B*, *C* mit den Endpuncten der Durchmesser, so ist $\angle$*BEC* = *R*, weil *BH* = *HE* = *HC*. Da

ferner $EBG = D = CEF$ (Satz XXVIII.), so ist $\triangle DBE \sim \triangle BEC \sim \triangle GEF$; folglich hat man:

$$\begin{aligned} DE : EB &= BC : EC \\ EB : BC &= EC : EF, \text{ daher ist} \\ \hline DE : BC &= BC : EF. \end{aligned}$$

Uebungs-Aufgaben über Kreis-Berührungen.

Nr. 1. Es sind zwei sich berührende Kreise, der Berührungspunct, und von einem derselben der Mittelpunct gegeben; man soll blos mit dem Lineale den Mittelpunct des andern finden.

Nr. 2. Es ist ein Kreis der Lage und Grösse nach gegeben, ferner die Lage einer durch den Mittelpunct gehenden geraden Linie. Man soll einen Kreis beschreiben, der von dieser Linie ein gegebenes Stück abschneidet und zugleich den gegebenen Kreis berührt.

Nr. 3. An zwei der Lage und Grösse nach gegebene Kreise die möglichen gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

Nr. 4. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, die mit einer der Lage nach gegebenen Linie einen bestimmten Winkel macht.

Nr. 5. An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, welche einen bekannten Winkel einschliessen.

Nr. 6. Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu beschreiben, der eine gegebene Linie berührt und dessen Mittelpunct

a) in einer Geraden,

b) in einer Kreislinie liegt.

Nr. 7. An einen gegebenen Kreis mit gegebenem Halbmesser einen Berührungskreis zu beschreiben, dessen Mittelpunct sich in einer gegebenen Geraden befindet.

Nr. 8. In einen gegebenen Viertelkreis einen Berührungskreis einzuschreiben.

Nr. 9. In ein gleichseitiges Dreieck drei gleiche sich gegenseitig berührende Kreise einzuschreiben, von welchen jeder eine Seite des Dreiecks berührt.

Nr. 10. In einen Kreis drei gleiche Kreise zu beschreiben, die sich gegenseitig und den gegebenen Kreis berühren.

Nr. 11. In ein gleichseitiges Dreieck drei gleiche Kreise einzuschreiben, die sich einander und zugleich jeder zwei Seiten des Dreiecks berühren.

Nr. 12. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck drei Halbkreise zu beschreiben, welche sich einander berühren und zugleich jeder eine anliegende Seite berührt, während die Durchmesser in die Seiten fallen.

Nr. 13. Es ist ein Viereck gegeben, bei welchem die Summe jedes Paares von Gegenseiten gleich ist; man soll in dasselbe einen Berührungskreis beschreiben.

Nr. 14. Es ist ein Tangentenviereck gegeben; man soll aus den Ecken als Mittelpuncten Kreise beschreiben, welche sich je zwei berühren.

Nr. 15. Es sind zwei Kreise ungleicher Grösse gegeben; man soll in der Centrale diejenigen Puncte finden, aus welchen an beide Kreise gemeinschaftliche Tangenten gezogen werden können.

Nr. 16. Drei sich berührende Kreise zu beschreiben, deren Peripherien durch die Eckpuncte eines gegebenen Dreiecks gehen.

Nr. 17. Auf den Schenkeln eines Winkels sind zwei Puncte in gleichen Entfernungen vom Scheitel gegeben; man soll zwei Kreise mit einer vorgeschriebenen Summe der Radien beschreiben, welche die Schenkel in diesen Puncten und sich unter einander von aussen berühren.

Nr. 18. Es sind drei gerade Linien L, L', L'' gegeben; man soll drei sich gegenseitig berührende Kreise mit den Radien r, r', r'' so beschreiben, dass ein Mittelpunct c in L, der zweite c' in L', der dritte c'' in L'' fällt.

Nr. 19. Es ist ein $\triangle\, ABC$ gegeben; man soll in dasselbe drei sich gegenseitig berührende Kreise mit den Radien r, r', r'' so beschreiben, dass der Kreis mit r die Seite a, der Kreis mit r' die Seite b und der Kreis mit r'' die Seite c berührt.

Nr. 20. Beweise folgenden Lehrsatz: Errichtet man in den Endpuncten eines Durchmessers Perpendikel und zieht zwischen diesen eine beliebige Tangente an den Kreis, so bilden die Verbindungslinien des Mittelpunctes mit den Endpuncten der Tangente in jenen Perpendikeln einen rechten Winkel und sind den aus dem

Berührungspuncte an die Enden des Durchmessers gezogenen Linien gegenseitig parallel.

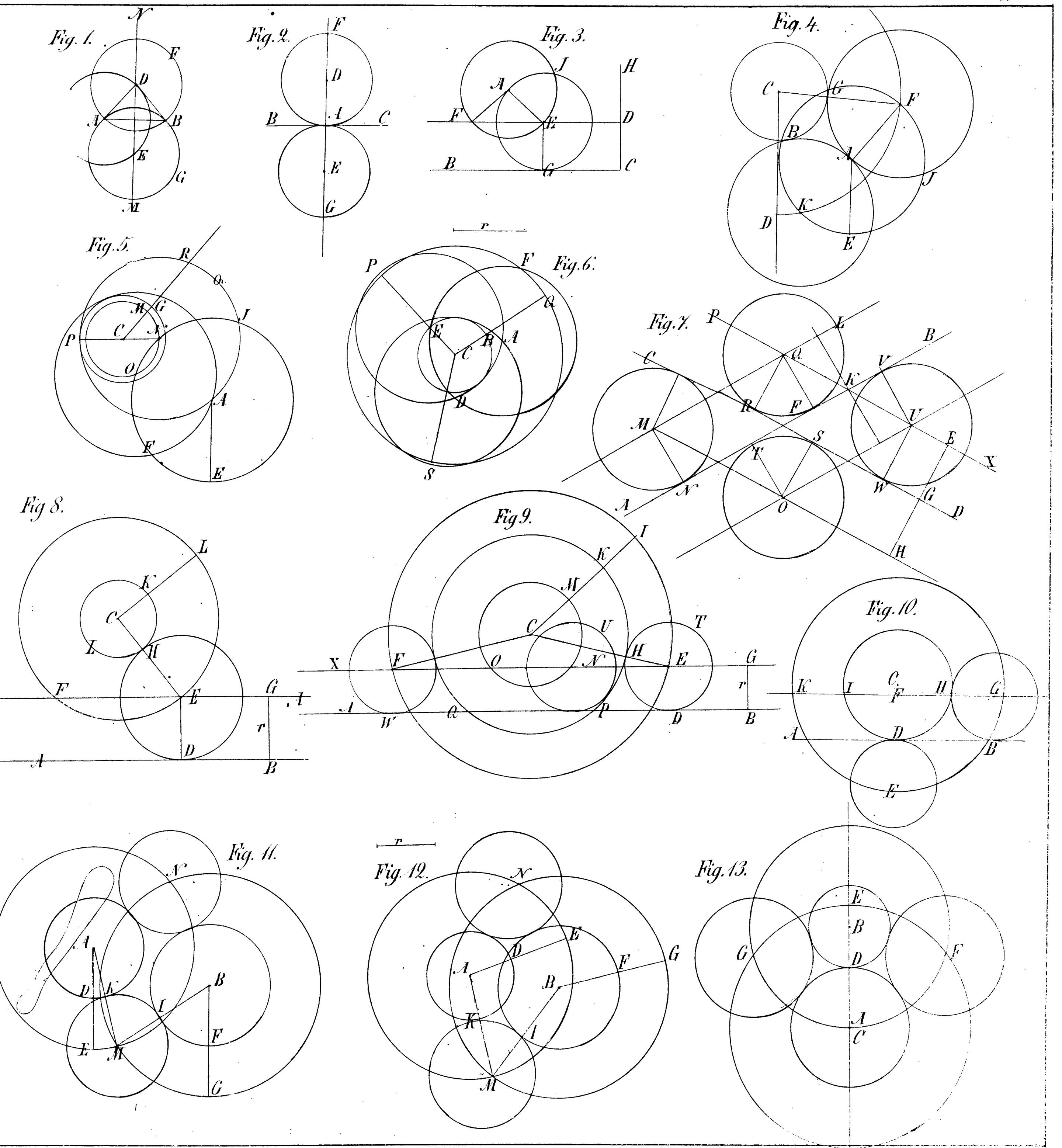
Nr. 21. Wie beweist man folgenden Lehrsatz: Sind an zwei aus einander liegende Kreise die beiden äusseren Tangenten und eine innere gezogen: so ist das zwischen den Berührungspuncten einer äusseren Tangente liegende Stück ebenso gross als die zwischen liegende Tangente, wenn sie bis an die äusseren verlängert wird.

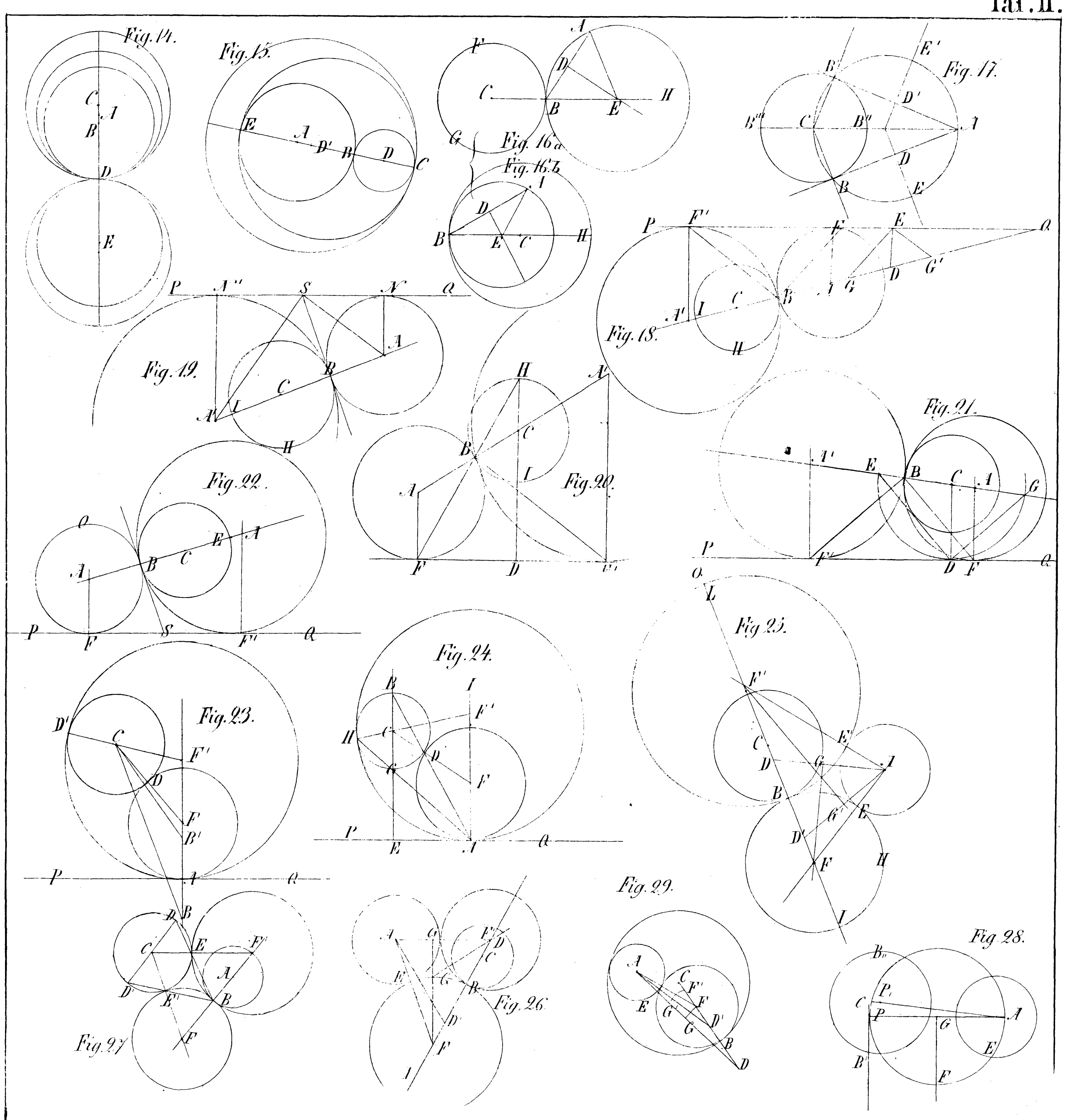
Nr. 22. Wie wird folgender Lehrsatz bewiesen: Wenn vier Kreise, jeder drei Seiten irgend eines Vierseits ausserhalb oder innerhalb berühren: so liegen die Mittelpuncte dieser Kreise immer in einerlei Kreisumfange.

Das Problem des Apollonius
lautet:

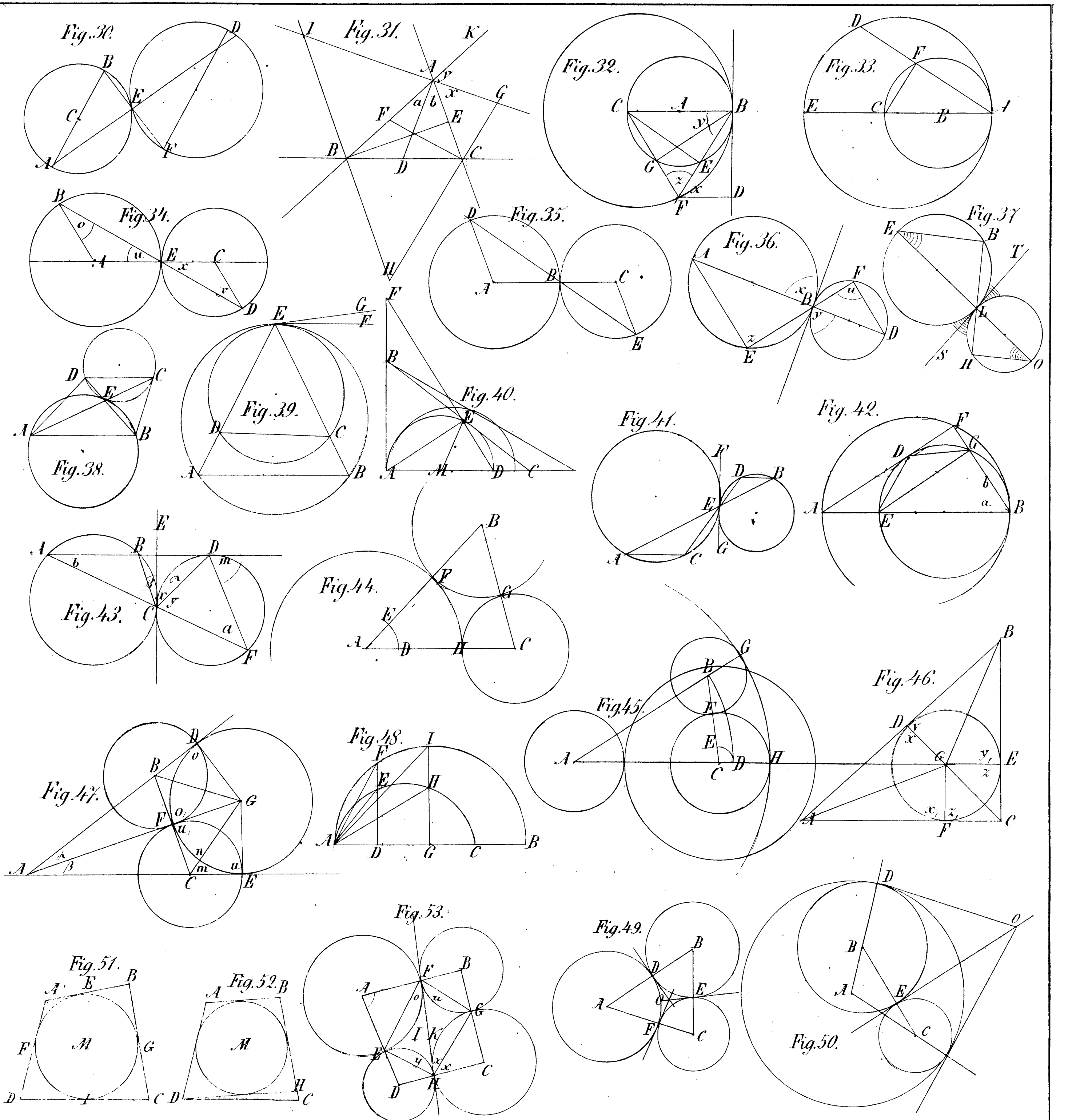
Einen Kreis zu beschreiben, welcher

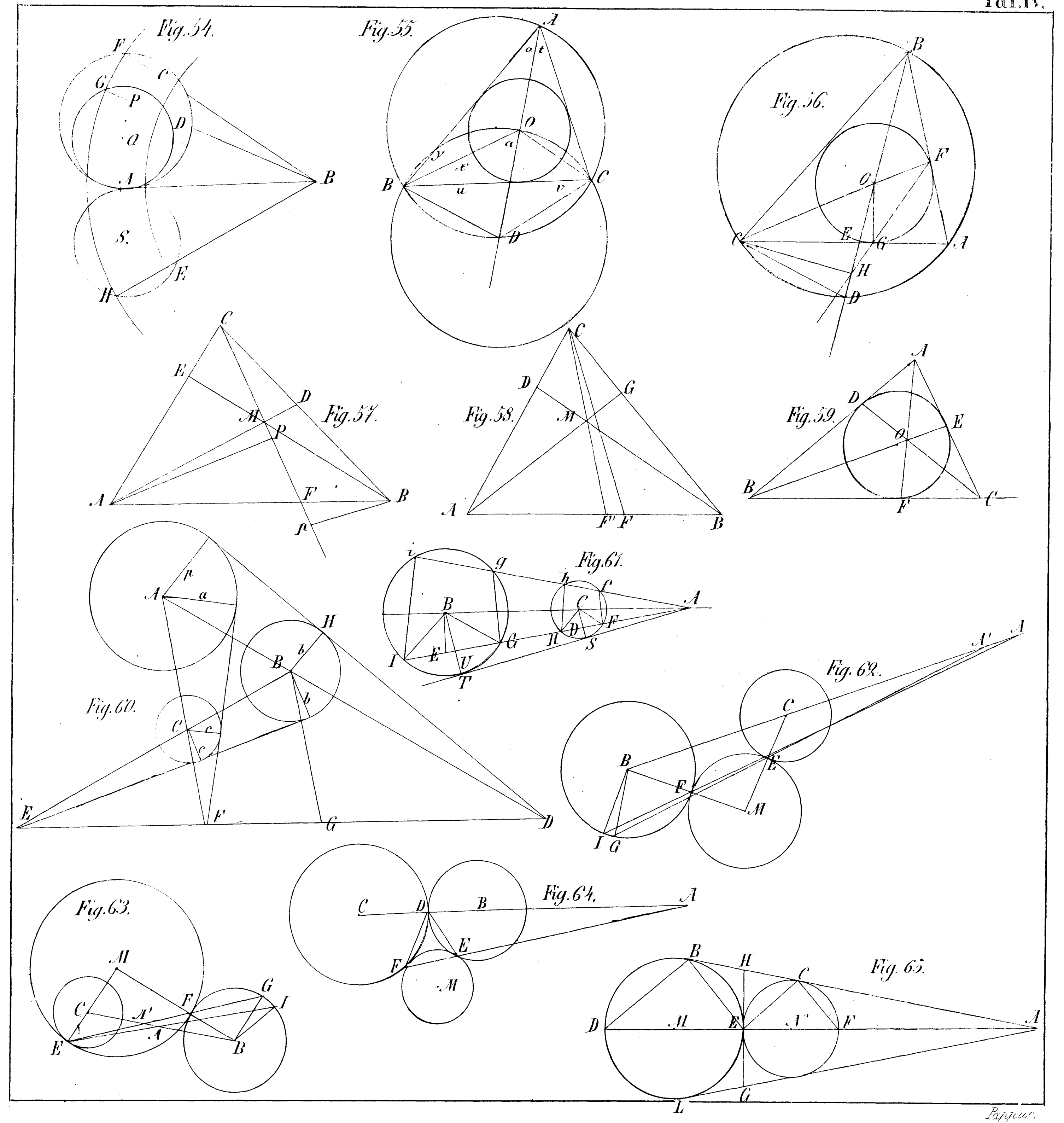
a) durch drei Puncte geht;
b) eine gerade Linie berührt und durch zwei Puncte geht;
c) einen Kreis berührt und durch zwei Puncte geht;
d) zwei gerade Linien berührt und durch einen Punct geht;
e) eine gerade Linie und einen Kreis berührt, ausserdem durch einen Punct geht;
f) zwei Kreise berührt und durch einen Punct geht;
g) drei gerade Linien berührt;
h) zwei gerade Linien und einen Kreis berührt;
i) zwei Kreise und eine gerade Linie berührt;
k) drei Kreise berührt.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8.
Fig 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.


Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16 a
Fig. 16 b
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.

Poppus.


Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.


Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.

Pappus.